2. Построение моделей линейных объектов

Рассмотрим построение модели двигателя постоянного тока.
Вход – напряжение якоря – u(t), (в вольтах); выход – угол поворота θ(t), (в радианах). Угловая скорость вращения – ω(t) = dθ(t)/dt.

Уравнение вращательного движения -

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) - M_H(t)\ ,$$

где M(t) – вращающий момент (в Н*м); M_H(t) – момент нагрузки; J – момент инерции якоря и нагрузки (кг*м^2). M(t) – электромагнитный момент двигателя
M(t) = C_M * Φ * i(t),
C_M – коэффициент; Φ – магнитный поток (в веберах); i(t) – ток якоря (в амперах), определяемый из уравнения –
u(t) = e(t) + R*i(t),
где e(t) – электродвижущая сила (ЭДС), в вольтах; R – сопротивление якорной цепи (в омах). ЭДС рассчитывается
e(t) = C_ω * Φ * ω(t),
C_ω – коэффициент. Вводя k_1 = C_M * Φ, k_2 = C_ω*Φ, модель двигателя:

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 * i(t) - M_H(t), \qquad e(t) = k_2 * \omega(t),$$
$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \qquad u(t) = e(t) + R*i(t) \tag{2.1}$$

Уравнения модели (2.1) можно преобразовать к виду:

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{k_1k_2}{R} * \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 * u(t) - M_H(t). \tag{2.2}$$

Уравнение модели (2.2) связывает вход u(t) и нагрузку M_H(t) с выходом θ(t). Уравнение (2.2) называется уравнением «вход-выход». Уравнение (2.2) второго порядка.

Канонический вид уравнений модели.

Рассмотрим случай $M_H(t) = 0$ (отсутствия нагрузки). Уравнение (2.2) можно представить в виде системы уравнений (нормальная форма Коши) -

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$
$$\dot{\omega}(t) = -\frac{k_1k_2}{J * R} * \omega(t) + \frac{k_2}{J} * u(t)$$

или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 * k_2}{J*R} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{J} \end{bmatrix} * u(t). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) обычно записывают в виде

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A} * x(t) + B * u(t) \tag{2.4}$$

где

$$\mathrm{x(t)} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 * k_2}{J * R} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{J} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.4) связывает вход u(t) и вектор состояния x(t), поэтому называется моделью вход-состояние.

Полная модель в пространстве состояний –

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{A} * x(t) + B * u(t) \\ y(t) &= C * x(t) + D * u(t) \end{aligned} \qquad \text{и} \quad (2.5)$$

модель вход-состояние-выход. Если выход – угол поворота вала двигателя

$$y(t) = \theta(t) = [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = [1 \quad 0] * x(t)$$

так что C = [1 0] и D = 0. Если выход угловая скорость, то C = [0 1].
Запись модели в виде (2.5) позволяет использовать единые методы и программы для анализа моделей. Фактически, мы приходим к задаче Коши, методы решения которой хорошо разработаны.

Переходная функция

Определим реакцию объекта на «единичный скачек»

$$\mathrm{l(t)} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Реакция объекта на единичный скачек называется переходной функцией h(t).

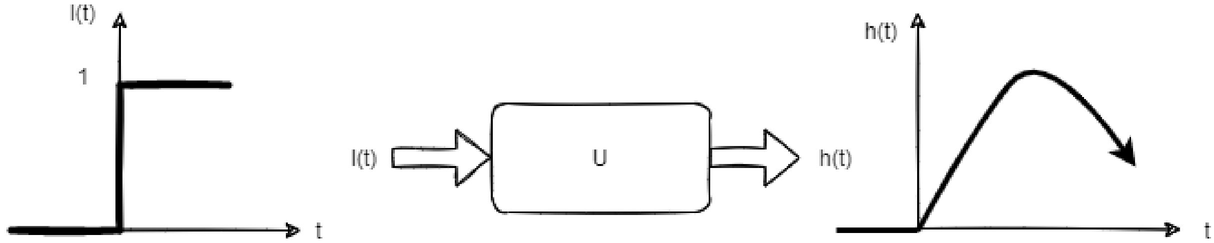

Рис.3. Реакция объекта h(t) на единичный скачек l(t)

Передаточная функция - 1

Положим, что модель объекта (связывающая вход x(t) с выходом y(t)) -

$$b_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)\,. \qquad (2.7)$$

Введем оператор дифференцирования p = d / dt

$$b_2 p^2 y(t) + b_1 p y(t) + b_0 y(t) = a_1 p x(t) + a_0 x(t)\,.$$

$$(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) y(t) = (a_1 p + a_0) x(t)$$

y(t) = $\frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} * x(t) = W(p) x(t)$

Функция $W(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$ называется передаточной функцией объекта, который описывается уравнением (2.7) при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция W (λ) называется правильной, если степень ее числителя не больше, чем степень знаменателя; строго правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя; неправильной, если степень числителя больше, чем степень знаменателя.

Нулями передаточной функции называются корни ее числителя, а полюсами – корни знаменателя.

Преобразование Лапласа

Для функции f(t) преобразование Лапласа $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\}}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \qquad (2.8)$$

F(s) – изображение для f(t), s – комплексная переменная.

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st} ds \qquad (2.9)$$

Например –

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \qquad \mathcal{L}\{l(t)\} = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad (2.10)$$

Свойства преобразования Лапласа.

1)

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

2) $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s * F(s) - f(0)$

f(0) – значение функции f при t = 0.

При нулевых начальных условиях изображение производной равно изображению самой функции, умноженному на s.

Начальное и конечное значения функции оригинала (при t = 0 и t ->∞)

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s * F(s), \qquad f(\infty) = \lim_{s\to 0} s * F(s)$$

Передаточная функция - 2

Положим, что модель объекта (связывающая вход x(t) с выходом y(t)) -

$$b_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)\,.$$

Применим преобразование Лапласа, считая, что все начальные условия нулевые, приходим к уравнению в изображениях, связывающее преобразования Лапласа входа X(s) и выхода Y(s)

$$b_2 * s^2 Y(s) + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = a_1 s X(s) + a_0 X(s)\,.$$

Изображение выхода

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 p s^2 + b_1 s + b_0} * X(s) = W(s) X(s) \qquad (2.11)$$

Функция

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \qquad (2.12)$$

называется передаточной функцией объекта, записанная в виде функции от комплексной переменной s.

Таким образом,

- при нулевых начальных условиях изображение выхода линейного объекта вычисляется как произведение его передаточной функции на изображение входного сигнала;
- передаточная функция равна отношению изображений по Лапласу выхода и входа при нулевых начальных условиях.

Пример

Пусть модель объекта -

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k * x(t)\,. \qquad (2.13)$$

Решение (2.13) при x(t) = 1 (t > 0)

$$y(t) = k * C_1 * \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

Для определения переходной характеристики y(0) = 0, C_1 = -k, что приводит

$$h(t) = \ y(t) = k * [1 - \ exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad] \ . \qquad (2.14)$$

Решим задачу с помощью передаточных функций и изображений по Лапласу.

Чтобы найти изображение выхода по формуле (2.11), нужно знать изображение входного сигнала X (s) и передаточную функцию звена W (s). Изображение входа находим по табличным данным (2.10), а передаточную функцию – из (2.12).

$$X(s) = \frac{1}{s}, \qquad W(s) = \ \frac{k}{Ts + 1}$$

Изображение выхода из (2.11)

$$\mathrm{Y(s)} = W(s)X(s) = \ \frac{k}{Ts+1} * \frac{1}{s} = \ \frac{k}{s} - \ \frac{k}{s+1/T}$$

По принципу суперпозиции оригинал - сигнал выхода

$$y(t) = k * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - k * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\}$$

С учетом (2.10)

$$y(t) = k - k * \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad , \quad \text{при } t > 0$$

что совпадает с решением (2.14). Таким образом, реакцию системы на известный входной сигнал можно вычислить без прямого решения дифференциального уравнения.

Передаточная функция и пространство состояний

Если вход u(t), вектор состояния x(t), y(t) – выход объекта, то модель в пространстве состояний –

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \ \mathrm{A} * x(t) + B * u(t) \\ y(t) &= \ C * x(t) + D * u(t) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Переходя к изображениям сигналов по Лапласу при нулевых начальных условиях –

$$\begin{aligned} s * X(s) &= \ \mathrm{A} * X(s) + B * U(s) \\ Y(s) \quad &= \ C * X(s) + D * U(s) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Преобразование первого уравнения (2.15): (s*I – A)*X(s) = B*U(s), X(s) = (s*I – A)$^{-1}$ *B*U(s) Из второго уравнения имеем -

$$Y(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B * U(s) + D * U(s) = [C * (s * I - A)^{-1} * B + D] * U(s)$$

Передаточная функция – отношение изображений выхода и входа

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C * (s * I - A)^{-1} * B + D$$

Частотные характеристики

Рассмотрим эталонный сигнал x(t) = sin ωt, ω – угловая частота (радиан в секунду). При этом на выходе будет y(t) = A(ω) sin(ωt+ϕ(ω))

Функция A(ω) - амплитудная характеристика, ϕ(ω) – частотная характеристика.

Зная передаточную функцию системы W(s), можно вычислить амплитуду и сдвиг фаз.

Функции A(ω) и φ(ω) (они для каждой частоты принимают вещественные значения) называются соответственно амплитудной и фазовой частотными характеристиками (АЧХ и ФЧХ). Амплитудная частотная характеристика – это коэффициент усиления гармонического сигнала. Если на какой-то частоте ω значение A(ω) > 1, входной сигнал усиливается, если A(ω) < 1, то вход данной частоты ослабляется.

По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1) фильтр низких частот – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;

2) фильтр высоких частот – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;

3) полосовой фильтр – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2 ;

4) полосовой режекторный фильтр – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω1 до ω2, остальные пропускает.

Частотные характеристики во многих случаях можно снять экспериментально. Если объект устойчивый, на его вход подается гармонический сигнал x(t) = sin ωt и записывается сигнал y(t) на выходе. Определив амплитуду и сдвиг фазы для разных частот, можно построить по точкам амплитудную и фазовую частотные характеристики.

Логарифмические частотные характеристики

Вместо A(ω) было предложено использовать логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ): график, на котором по оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты (lg ω), а по оси ординат – величина $L_m(\omega)$ = 20lg A(ω) , измеряемая в децибелах (дБ). При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс также откладывается логарифм частоты lg ω.

Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу). Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или диаграммой Боде.