Введение

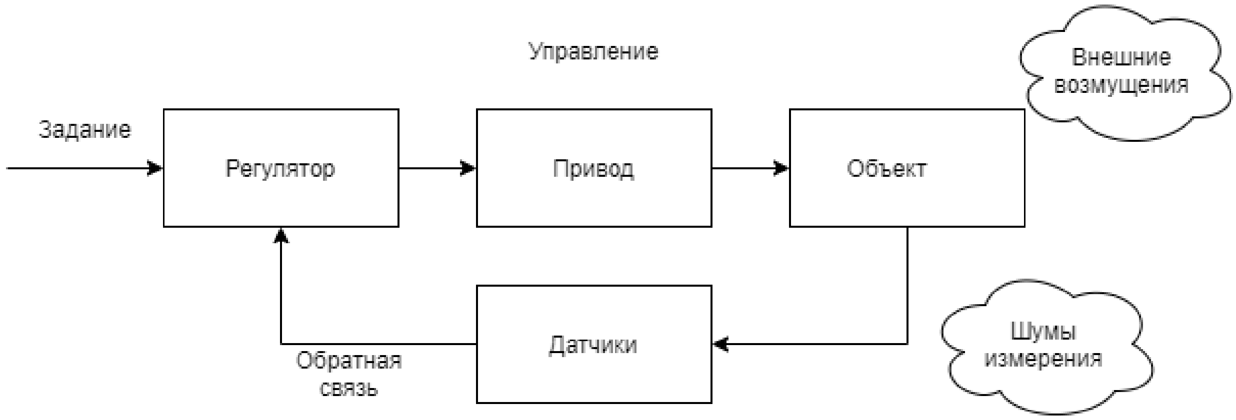

Рис. В.1. Общий вид системы управления

Рис. В.2. Общая схема регулятора с обратной связью

Например, в системе управления курсом автомашины

- *объект управления* – это автомашина; для управления курсом используется руль;
- *регулятор* – цифровая вычислительная машина;
- *привод* – рулевое устройство, которое усиливает управляющий электрический сигнал и преобразует его в поворот колес;
- *датчики* – измерительная система, определяющая фактический курс;
- *внешние возмущения* – это неровности дороги и ветер, отклоняющие автомобиль от заданного курса;
- *шумы измерений* – это ошибки датчиков.

Регулятор определяет рассогласование. Может быть отрицательная и положительная обратная связь.

Автоматические системы управления применяются для решения задач:

- *стабилизации*,
- *программного управления*;
- *слежения.*

Цель управления – изменение состояния объекта в направлении, определяемом заданием.

Теория автоматического регулирования должна ответить на вопрос: «как построить регулятор, который может управлять данным объектом так, чтобы достичь цели?» Для этого разработчику необходимо знать, как система управления будет реагировать на разные воздействия, то есть нужна модель системы: объекта, привода, датчиков, каналов связи, возмущений, шумов.

Для управления нужна модель системы. В рамках данной работы под моделью будем понимать математическое описание системы. Построить модель – это значит найти оператор U, связывающий входы x и выходы y: y =U[x]. С помощью оператора U можно предсказать реакцию объекта y на любой входной сигнал x.

Оператор интегрирования

U[x] = $\int_0^t x(t)dt$

Оператор дифференцирования

U[x(t)] = $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$

Обычно оператор дифференцирования обозначается буквой p. Запись y(t) = p x(t) внешне выглядит как «умножение» оператора p на сигнал x(t), но, на самом деле, обозначает действие этого оператора, то есть дифференцирование:

$P\ x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

1. Математические модели

1.1. Пример построения модели 1.

Ток i (в *амперах*), проходящий по цепи с конденсатором, пропорционален производной от разности потенциалов u (в *вольтах*) на его пластинах:

i(t) = C $\frac{du(t)}{dt} = C\ p\ u(t)$

C – емкость конденсатора (фарадах); p – оператор дифференцирования.

Падение напряжения u на катушке индуктивности пропорционально производной от проходящего тока i :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\ p\ i(t)$$

где L – индуктивность (измеряется в *генри*).

Построим модель:

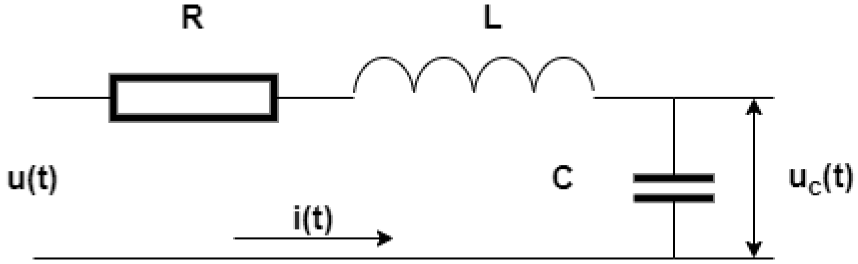

Рис. 1.1. Общая схема RLC-цепочки

u(t) = $u_c(t) + L\frac{di(t)}{dt} + R\ i\ (t)$

$i(t) = C\frac{dUc(t)}{dt}$

Для объекта (RLC-цепочки) вход u(t), выход $u_c(t)$.
Представленная модель позволяет связать выход модели с входом модели.

1.2. Пример построения модели 2.

Построим модель, связывающую высоту уровня воды в баке - h, м с расходом вытекающей воды – q , $м^3/с$, если площадь сечения бака S, а площадь выходного отверстия S_0.

Закон Бернулли в данном случае, приводит к уравнению

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2},$$

ρ, $кг/м^3$ - плотность жидкости; g = 9.81, $м/с^2$; v , м/с – скорость вытекания жидкости. Отсюда $v = \sqrt{2gh}$, или переходя к расходу $q = S_0 v$ приходим к нелинейному уравнению

$$q = S_0\sqrt{2gh}.$$

Вход модели – высота уровня воды в баке h (t), выход – расход вытекающей воды q(t). Уравнение нелинейное, но его можно линеаризовать относительно номинальной (рабочей) точки (h_0; q_0).

Модифицируем модель. Положим, что в бак подкачивают воду насосом, расход воды которого Q (входной параметр модели), а выход - высота уровня воды h . За время Δt объем добавленной воды - QΔt, объем вытекшей из бака воды - qΔt. Изменение уровня воды –

$$\Delta h = \frac{Q-q}{S}\Delta t$$

Переходя к пределу Δt -> 0 имеем уравнение, связывающее высоту уровня воды в баке h (t) с расходом насоса Q (входной параметр модели),

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{Q(t) - S_0\sqrt{2gh(t)}}{S} = F(Q,h) \qquad (1.1)$$

В установившемся режиме dh/dt = 0. Следовательно, в стационарном режиме (рабочая точка) $h_0 = Q_0^2 \ / \ (2 * g * S_0^2)$.

Раскладывая функцию F(Q,h) в ряд Тейлора относительно рабочей точки и ограничиваясь первыми членами разложения

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d(h_0+\Delta h)}{dt} = F(Q_0,h_0) + \frac{\partial F}{\partial Q}\Delta Q + \frac{\partial F}{\partial h}\Delta h$$

В окрестности рабочей точки $F(Q_0,h_0) = 0$, (стационарный режим dh/dt = 0 в соответствии с (1.1)). Тогда приходим к линеаризованному уравнению (опуская знак приращения Δ) -

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_Q Q(t), \qquad k_h = \frac{S_0 * \sqrt{g}}{S * \sqrt{2 * h_0}}, \qquad k_Q = \frac{1}{S}\ . \qquad (1.2)$$

Управление

Для задачи (1.2): h – регулируемая величина; Q – сигнал управления.

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t \big(Q(t) - q(t)\big)dt \qquad (1.3)$$

Здесь h(t), Q(t), q(t) – отклонения от номинальных значений. (1.3) можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}[Q(t) - q(t)] \qquad (1.4)$$

В качестве обратной связи используется сигнал с датчика уровня воды – $h_0(t)$. Ошибка управления $e(t) = h_0(t) - h(t)$. Простой регулятор – усилитель с коэффициентом К –

$q(t) = K * e(t) = K * [\, h_0(t) - h(t)\,]$.

При больших значениях К система быстрее уменьшает отклонение по высоте уровня воды, но сильнее сказываются помехи (шумы) измерений. Кроме того, происходит «дерганье» насоса.

1.3. Пример построения модели квадрокоптера

В качестве модели квадрокоптера рассмотрим плоское тело, состоящее из корпуса и 4 пропеллеров (рис.1.2). Корпусом будем считать 2 одинаковых стержня длины 2l, пересекающиеся в точке А под прямым углом. Масса каждого стержня равна m_0 /2.

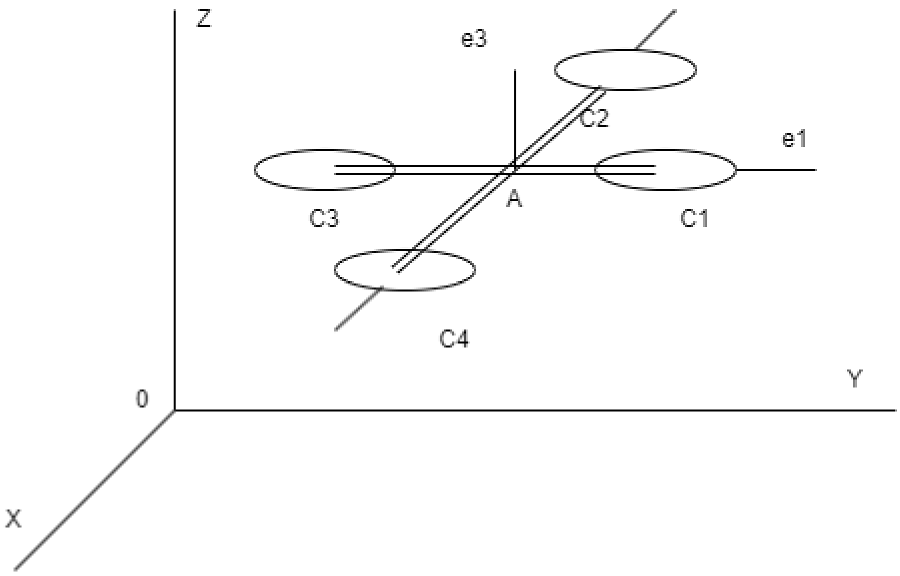

Рис. 1.2. Модель квадрокоптера

Предполагается, что пропеллерами являются диски, закрепленные на концах стержней в точках С1, С2, С3, С4. Диски имеют радиус r, массу m_i. Центр масс робота $M = m_0 + 4m_i$ находится в точке А. Пусть {Oxyz} – правая инерциальная система координат..

Положение центра масс тела определяется вектором ξ=(x, y, z). Пусть $\{Ae_1e_2e_3\}$ – правая система координат, жестко связанная с роботом.

Основные предположения

1) При вычислении кинетического момента и других динамических характеристик пропеллера будем предполагать, что его тензор инерции относительно точки крепления имеет такой же вид, как у однородного диска, который назовем диском несущего винта.

2) Будем рассматривать только умеренные маневры. Соответственно, мы пренебрегаем упругостью лопастей несущего винта, и диск несущего винта считается бесконечно жестким и бесконечно тонким. Диск все время вращается в плоскости, перпендикулярной оси Oe_3.

3) Подъемная сила каждого диска создает силу тяги u_i, приложенную в точке C_i и все время направленную вдоль оси Oe_3.

4) Управление ориентацией задается с помощью трех независимых вращающих моментов {Г1, Г2, Г3} вокруг каждой из трех осей системы координат $\{Ae_1e_2e_3\}$. Эти вращающие моменты приложены непосредственно к корпусу и не порождают никаких сил поступательного движения, связанных со вторичными аэродинамическими эффектами или упругостью лопастей несущих винтов.

5) Полагая, что линейная скорость квадрокоптера и его вращения существенно меньше скорости вращения винтов, будем считать, что воздух оказывает сопротивление только на лопасти несущих винтов, создавая тем самым отрицательные вращательные моменты.

6) Векторы угловых скоростей винтов, расположенных в точках C_i для нечетного i, сонаправлены вектору e3, остальные – противонаправлены.

Вычисление лагранжиана.

Ориентация корпуса робота задается с помощью трех углов Крылова ν =(φ, ψ, θ). Соответствующую матрицу перехода в неподвижной системе координат обозначим R. Кроме того, чтобы учесть динамику несущих винтов, введем скорости углов поворота лопастей $\dot{\gamma}_i = d\gamma_i/dt$, i=1,2,3,4. От них будут зависеть управляющие моменты. Таким образом, обобщенные координаты для робота имеют вид: q = (x, y, z, φ, ψ, θ).

Обозначим I_A момент инерции корпуса относительно точки A, выраженный в подвижной системе координат; Ω_A – угловая скорость корпуса в той же системе координат. Кинетическая энергия поступательного движения робота задается по формуле:

$$T_{trans} = M*(\dot{\xi}, \dot{\xi})/2$$

Кинетическая энергия вращения корпуса:

$$T_{rotA} = (\Omega_A, I_A\, \Omega_A)/2$$

где $I_A = \mathrm{diag}(I_1^A, I_2^A, I_3^A)$, причем в силу симметрии $I_1^A = I_2^A$.

В силу Предположения 2 угловая скорость лопастей в подвижной системе координат выражается по формуле:

$$\Omega_{Ci} = \Omega_A + (-1)^{i+1}\dot{\gamma}_i \quad e_3 .$$

Предположим, что несущие винты в процессе собственного вращения образуют диск с центром масс в точке C_i и диагональным тензором инерции I_C в подвижной системе координат: $I_C = \mathrm{diag}\ (I_1^C,\ I_2^C,\ I_3^C\ )$, причем в силу симметрии $I_1^A = I_2^A$. Таким образом, суммарная кинетическая энергия вращения квадрокоптера выглядит следующим образом:

$$T_{rotA} = \frac{1}{2} * (\Omega_A, I_A \Omega_A) + \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{4} (\Omega_{C_i}, I_C \Omega_{C_i}) =$$

$$= \frac{1}{2} * (\Omega_A, (I_A + 4*I_C) \Omega_A) + \frac{1}{2} * I_3^C (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 + \dot{\xi}_4^2) +$$

$$+ (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_3 - \dot{\xi}_4) (\Omega_A, I_C e_3)$$

Единственный потенциал, который будет учтен, – потенциал силы тяжести: $V = mgz$. Угловая скорость в подвижной системе координат имеет следующий вид:

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \dot{\varphi} sin\psi \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta \\ \dot{\varphi} \cos\psi \cos\theta - \dot{\psi} \sin\theta \end{pmatrix}$$

Положим по определению:

$$W_\nu := \begin{pmatrix} -sin\psi & 0 & 1 \\ \cos\psi \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\psi \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\dot{\nu} := = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = W_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \dot{\varphi} sin\psi \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta \\ \dot{\varphi} \cos\psi \cos\theta - \dot{\psi} \sin\theta \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det W\nu = -\cos\psi$, то есть кинематическое преобразование будет невырожденным для всех ориентаций, за исключением тех, у которых $\psi = \pi/2 + \pi k$, k – целое.

Полная функция Лагранжа имеет вид:

$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - V$

Обобщенные силы

В соответствии с Предположением 3 существуют 4 силы поступательного движения и все они направлены вдоль оси e_3. Следовательно, направление силы поступательного движения, приложенной к корпусу, определяется его ориентацией. В инерциальной системе координат направление силы тяги задается вектором: $G(\eta) = Re_3$.

Продолжение:

Савицкий А.В., Павловский В.Е. Модель квадрокоптера и нейросетевой алгоритм управления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 77. 20 с. doi:10.20948/prepr-2017-77 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-77

Павловский В.Е., Савицкий А.В. Исследование обратной задачи для вычисления управляющих воздействий для квадрокоптера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 17. 20 с. doi:10.20948/prepr-2017-17 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-17