6. Симплекс-метод

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования, в то время, как графический метод пригоден лишь для системы ограничений с двумя переменными.

Рассматривается задача линейного программирования в каноническом виде

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min$

при ограничениях (матрица ограничений –равенств)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n = b_l\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(l+1)}x_1 + a_{(l+1)}x_2 + \cdots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m\,, \end{cases}$$

Задача линейного программирования в векторной форме (канонический вид)

$$f(x) = (c,x) \rightarrow \min$$
$$Ax = b,$$
$$x \geq 0$$

Идея симплекс-метода состоит из двух частей:

1. Системы линейных неравенств и равенств задают многомерные выпуклые многогранники (политопы). В одномерном случае это точка, луч или отрезок, в двумерном — выпуклый многоугольник, в трехмерном — выпуклый многогранник. Минимизация линейной функции — это по сути нахождение самой «дальней» точки в определенном направлении. Самой дальней точкой должна быть некая вершина. В общем случае, для системы из m неравенств в n-мерном пространстве вершина — это точка, удовлетворяющая системе, для которой ровно n из этих неравенств обращаются в равенства (при условии, что среди неравенств нет эквивалентных). Таких точек всегда конечное число, хоть их и может быть очень много.

2. Теперь у нас есть конечный набор точек, вообще говоря можно их просто взять и перебрать, то есть сделать что-то такое: для каждого подмножества из n неравенств решить систему линейных уравнений, составленных на выбранных неравенствах, проверить, что решение подходит в исходную систему неравенств и сравнить с другими такими точками. Это довольно простой неэффективный, но рабочий метод. Симплекс-метод вместо перебора двигается от вершины к вершине по ребрам таким образом, чтобы значений целевой функции улучшалось. Оказывается, если у вершины нет «соседей», в которых значений функции лучше, то она оптимальна.

Определения.

Всякое неотрицательное решение системы ограничений называется допустимым решением.

Пусть имеется система m ограничений с n переменными (m < n). Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и n - m неосновных. (небазисных, или свободных) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными называются основными, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n - m переменных называются неосновными (или свободными).

Алгоритм симплекс метода

Шаг 1. Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на - 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком "плюс", если в исходном неравенстве знак "меньше или равно", и со знаком "минус", если "больше или равно").

Шаг 2. Если в полученной системе m уравнений, то m переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.

Шаг 3. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

Шаг 4. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят её в основные. Переход к шагу 2.

Важные условия

Если допустимое базисное решение даёт оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение - не единственное.

Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с отрицательным коэффициентом в случае её максимизации (с положительным - в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит также с отрицательными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений.

Пример 6.1

Найти $F(x) = x_1 + 2^* x_2 \dashrightarrow \max$

Ограничения

$$
\begin{aligned}
- x_1 + 2^*x_2 &>= 2 \\
x_1 + x_2 &>= 4 \\
x_1 - x_2 &<= 2 \\
x_2 &<= 6 \\
x_1 >= 0,\ x_2 &<= 0
\end{aligned}
$$

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3 , x_4 , x_5 , x_6 сводим к эквивалентной системе уравнений

$$
\begin{aligned}
- x_1 + 2^*x_2 - x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\
x_1 - x_2 + x_5 &= 2 \\
x_2 + x_6 &= 6 \\
x_j >= 0 \quad (j = 1,2,3\ldots,6)
\end{aligned}
$$

Соблюдалось правило: если в первоначальном ограничении знак "меньше или равно", то добавочную переменную нужно прибавлять, а если "больше или равно", то добавочную переменную нужно отнимать.

Выразив основные (базисные) переменные через неосновные (свободные), получим

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -2 - (x_1 - 2^*x_2) \\
x_4 &= -4 - (- x_1 - x_2) \\
x_5 &= 2 - (x_1 - x_2) \\
x_6 &= 6 - (x_2) \\
F &= 0 - (-x_1 - 2^* x_2)
\end{aligned}
$$

Первая симплексная таблица (F – индексная строка)

Таблица 1				
Базисные неизв.	Свободные члены	Свободные неизвест.		Вспомог. коэффиц
		X1	X2	
X3	-2	1	-2	
X4	-4	-1	-1	
X5	2	1	-1	
X6	6	0	1	
F	0	-1	-2	

Полученное решение не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных отрицательны. То есть оптимальным будет то решение, в котором коэффициенты при свободных переменных в индексной строке будут больше или равны нулю.

Для перехода к следующей таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел |-1| и |-2|. Это число 2. Поэтому ведущий столбец - тот столбец, в котором записано x2. Для определения ведущей строки находим минимум отношений свободных членов к элементам ведущего столбца, причём если в числителе положительное число, а в знаменателе отрицательное, отношение считается равным бесконечности. Итак,

$$\min \{ (-2)/(-2), (-4)/(-1), 2/(-1), 6/1\} = \min\{1, 4, \infty, 6\} = 1$$

Поэтому ведущая строка - та, в которой записано x3. Ведущим элементом, таким образом, является -2.

Составляем вторую симплексную таблицу. Новый базисный элемент x2 вписываем первой строкой, а столбец, в котором стояло x2, вписываем новую свободную переменную x3.

Заполняем первую строку. Для этого все числа, стоящие в ведущей строке таблицы 1, делим на ведущий элемент и записываем в соответствующий столбец первой строки таблицы 2, кроме числа, стоящего в ведущем столбце, куда записывается величина, обратная ведущему элементу (то есть, единица, делённая на ведущий элемент).

Заполняем столбец вспомогательных коэффициентов. Для этого числа ведущего столбца таблицы 1, кроме ведущего элемента, записываем с противоположными знаками в графу вспомогательных коэффициентов таблицы 2.

Для получения остальных строк таблицы 2 числа, уже стоящие в первой строке этой таблицы, умножаем на вспомогательный коэффициент, стоящий в заполняемой строке, и к результату прибавляем число из таблицы 1, стоящее в той же строке при соответствующей переменной.

$1*1 + (-4) = -3$

$-1/2 * 1 -1 = -3/2$

$-1/2 *1 +0 = -1/2$

Например, для получения свободного члена второй строки число 1 умножаем на 1 и прибавляем из таблицы 1 число -4. Получаем -3.

Коэффициент при x1 во второй строке находим так же. Так как в предыдущей таблице отсутствует столбец с новой свободной переменной x3, то коэффициент второй строки в столбце новой свободной переменной будет 0 (то есть из таблицы 1 прибавляем 0, так как в таблице 1 столбец с x3 отсутствует).

Таблица 2				
Базисные неизв.	Свободные члены	Свободные неизвест.		Вспогат коэффиц
		X1	X3	
X2	1	-1/2	-1/2	
X4	-3	-3/2	-1/2	1
X5	3	1/2	-1/2	1
X6	5	1/2	1/2	-1
F	2	-2	-1	2

Полученное таким образом решение вновь не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных вновь отрицательны.

Для перехода к следующей симплексной таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел |-2| и |-1|, то есть, модулей коэффициентов в индексной строке. Это число 2. Поэтому ведущий столбец - тот столбец, в котором записано x1.

Для поиска ведущей строки найдём минимум отношений свободных членов к элементам ведущего столбца. Получаем:

min { (1)/(-1/2), (-3)/(-3/2), 3/(1/2), 5/(1/2)} = min{∞, 2, 6, 10} = 2

Следовательно, ведущая строка - та, в которой записано x4, а ведущим элементом является -3/2.

Составляем третью симплексную таблицу Новую базисную переменную записываем первой строкой. В столбец, в котором было x1, вписываем новую свободную переменную x4

Заполняем первую строку. Для этого все числа, стоящие в ведущей строке таблицы 2, делим на ведущий элемент и записываем в соответствующий столбец первой строки таблицы 3, кроме числа, стоящего в ведущем столбце, куда записывается величина, обратная ведущему элементу (то есть, единица, делённая на ведущий элемент).

-3 : (-3/2) = 2

1 : (-3/2) = -2/3

-1/2 : (-3/2) =1/3

Заполняем столбец вспомогательных коэффициентов. Для этого числа ведущего столбца таблицы 2, кроме ведущего элемента, записываем с противоположными знаками в графу вспомогательных коэффициентов таблицы. Для получения остальных строк таблицы 3 числа, уже стоящие в первой строке этой таблицы, умножаем на вспомогательный коэффициент, стоящий в заполняемой строке, и к результату прибавляем число из таблицы 2, стоящее в той же строке при соответствующей переменной.

X2: 2*1/2+1 =2
-2/3*1/2+0 = -1/3
1/3*1/2-1/2 = -1/3

X5: 2*(-1/2)+3 =2
-2/3*(-1/2)+0 = 1/3
1/3*(-1/2)-1/2 = -2/3

X6: 2*(-1/2)+5 =4
-2/3*(-1/2)+0 = 1/3
1/3*(-1/2)+1/2 = 1/3

F: 2*2+2 =6
-2/3*(2) +0 = -4/3
1/3*2-1 = -1/3

Таблица 3				
Базисные неизв.	Свободные члены	Свободные неизвест.		Вспогат коэффиц
		X4	X3	
X1	2	-2/3	1/3	
X2	2	-1/3	-1/3	1/2
X5	2	1/3	-2/3	-1/2
X6	4	1/3	1/3	-1/2
F	6	-4/3	-1/3	2

Полученное решение вновь не оптимальное, поскольку коэффициенты при свободных неизвестных в индексной строке вновь отрицательные. Ведущий столбец – при x4, ведущая строка – при x5, определяется

min { (2)/(-2/3), (2)/(-1/3), 2/(1/3), 4/(1/3)} = min{∞, ∞, 6, 12} = 6

Ведущий элемент 1/3.

В четвёртой симплексной таблице новую базисную переменную x4 записываем первой строкой. В столбец, где было x4, записываем новую свободную переменную x5.

Формируем первую строку –

2:(1/3) = 6 1:(1/3) = 3 (-2/3):(1/3) = -2

Вспомог. коэффициенты заполняем с обратным знаком из ведущего столбца.

X1: 6*2/3+2 =6
3*2/3+0 = 2
-2*2/3+1/3 = -1

X2: 6*1/3+2 =4
3*1/3+0 = 1
-2*1/3-2/3 = -4/3

X6: 6*(-1/3)+4 =2
3*(-1/3)+0 = -1
-2*(-1/3)+1/3 = 1

F: 6*(4/3)+6 =14
3*(4/3)+0 = 4
-2*(4/3)-1/3 = -3

Таблица 4

Базисные неизв.	Свободные члены	Свободные неизвест.		Вспогат коэффиц
		X5	X3	
X4	6	3	-2	
X1	6	2	-1	2/3
X2	4	1	-4/3	1/3
X6	2	-1	1	-1/3
F	14	4	-3	4/3

Решение не оптимально. Ведущий столбец max(4,|-3|) = 4 при x5,
Ведущая строка (отношение свобод. членов к элементам вед. столбца)

min { (6)/(3), (6)/2, 4/1, 2/(-1)} = min{2, 3, 4, ∞} = 2

Следовательно, ведущая строка - та, в которой записано x4. Но x3 и x4 уже были вместе среди свободных переменных. Поэтому для перевода очередной переменной из свободных в базисные выбираем другой ведущий столбец - тот, в котором записано x3.

min { (6)/(-2), (6)/(-1), 4/(-4/3), 2/(1)} = min{∞, ∞, ∞, 2} = 2

ключевая строка при x6, ведущий элемент 1

Таблица 5

Базисные неизв.	Свободные члены	Свободные неизвест.		Вспогат коэффиц
		X5	X6	
X3	2	-1	1	
X4	10			2
X1	8			1
X2	6			1
F	20	1	3	3

Ответ
x1 = 8, x2 = 6 Fmax = 8+2*6 = 20

https://kpfu.ru/staff_files/F32587409/Reshenie_simpleks_metodom_zadachi_LP_primer_i_algoritm.pdf