Введение

Задача математической оптимизации — это задача вида «Найти в множестве X элемент x^* такой, что для всех x из X будет выполняться $f(x^*) <= f(x)$. В научной литературе может формулироваться –

минимизировать f(x)
при условии $x \in X$

Исторически так сложилось, что популярные методы такие как градиентный спуск или метод Ньютона работают только в линейных пространствах (причем желательно простых, например $\mathbb{R}^n$). На практике же часто встречаются задачи, где нужно найти минимум не в линейном пространстве. Оказалось, что очень большой класс задач оптимизации удобно покрывается «ограничениям». Иначе говоря, удобно представлять множество X в виде системы равенств и неравенств. Задачи минимизации над пространством вида $\mathbb{R}^n$ таким образом стали условно называть «задачами без ограничений» (unconstrained problem), а задачи над множествами, заданными наборами равенств и неравенств — «задачами с ограничениями» (constrained problem).

Основная теория подведена под случай

минимизировать f(x)
при условии $g_i(x) <= 0, \quad 1 <= i <= m$
$Ax = b$

f, g_i – функции, A – матрица.

Определение. Функция f(x) называется унимодальной на отрезке [a b], если существует единственная точка ее минимума x^* и слева от этой точки функция f(x) является строго убывающей, а справа — строго возрастающей.

Функция унимодальна, если производная не убывает

1. Оптимизация функций одной переменной.

Пусть f(x) непрерывна на интервале [a, b] и дифференцируема на этом интервале за исключением конечного числа точек.

Ищем точки возможного экстремума (критические):
— точки, в которых $f'(x) = 0$;
— точки, в которых не существует $f'(x)$

Располагаем критические точки в порядке возрастания и для каждого интервала определяем знак производной. Если знак производной изменяется для двух соседних интервалов, то x^* - точка экстремума. Тип экстремума определяется либо знаком второй производной, либо знаками первой производной на соседних интервалах.

Метод перебора.

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации. Пусть функция f (x) унимодальна на отрезке [a, b] и требуется найти какуюлибо из точек минимума x* функции f (x) на отрезке [a ,b] с абсолютной погрешностью ε > 0.

Схема метода перебора.

Отрезок [a, b] разбивается на n равных частей:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

точками деления $x_i = a + i*(b-a)/n$, i = 0, 1, 2,...,n, где n >= (b-a)/ε

Вычисляются значения функции f(x) этих точках. Путем сравнения определяется точка x_m, для которой выполняется условие

$f(x_m) = \min (x_i)$. В качестве приближения точки минимума x* выбирается точка x_m, а в качестве приближения минимального значения функции f* — величина f (x_m). При этом максимальная погрешность ε определения точки минимума x* имеет вид ε = (b – a)/n.

Пример 1.1 Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 3 * \sqrt[3]{x^2} - x^2$$

Решение:

Найдем первую производную и критические точки:

1) $f'(x) = 2 * \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2 * x$;

2) $2 * \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2 * x = 0$ → $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

3) $f'(x)$ не существует в точке $x_3 = 0$.

X	(- ∞,-1)	-1	(-1,0)	0	(0 , 1)	0	(1, +∞)
f(x)	↑	2	↓	0	↑	2	↓
f'(x)	+	0	-	нет	+	0	-
Экстремум		max		min		max	

Пример 1.2. Найти минимальное значение f* и точку минимума x* функции $f(x) = x^3 - 12* x^2 - 7* x + 250$ на отрезке [7, 7.5]. Точку x* найти с погрешностью ϵ = 0.05.

Решение:

Используем метод перебора значений функции для точек отрезка [7, 7.5]. Проверим является ли функция f(x) унимодальной на отрезке [7, 7.5]. Производная функции f (x) = имеет вид $df/dx = 3*x^2 - 24* x - 7$. Вторая производная $d^2f/dx^2 = 6*x - 24 >= 0$ при x>=4.

Функция df/dx не убывает, если в целом x >= 4 и в частности $x \in [7, 7.5]$. Следовательно f(x) унимодальна на отрезке [7, 7.5]. Далее применим метод перебора для нахождения минимума функции f(x). Выберем число частей разбиения отрезка n = (7.5 – 7)/0.05 = 10.

Вычислим значения функции в каждой из 10 точек отрезка [7, 7.5]. В результате получим $f^* = -55.62$ при $x^* = 7.5$.

Пример 1.3. Найти минимальное значение f* и точку минимума x* функции

$f(x) = x^4 + 8*x^3 – 6*x^2 – 72*x$ на отрезке [1.5, 2]. Точку x* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Сначала проверим, является ли функция $f(x) = x^4 + 8*x^3 – 6*x^2 – 72*x$ унимодальной на отрезке [1.5,2]. Вторая производная функции f (x) имеет вид $f''(x) = 12*x^2 + 48*x - 12$. Корни уравнения $12*x^2 + 48*x - 12 = 0$ таковы:

$x_1 = -2 + \sqrt{5}$ и $x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

Следовательно, $f''(x) >= 0$, если в целом $x >= -2 + \sqrt{5}$ и в частности $x \in [1.5, 2]$. Используя критерий унимодальности, получаем, что f (x) унимодальна на отрезке [1.5, 2].

Далее применим метод перебора для нахождения минимума функции $f(x) = x^4 + 8*x^3 – 6*x^2 – 72*x$ на отрезке [1.5, 2]. Выберем число частей разбиения отрезка n:

$$n = (b-a)/\varepsilon = (2-1.5)/0.05 = 10$$

Вычислим значения функции f (x) в точках деления x_i :

$$x_i = a + i*(b – a)/n = 1.5 + i*0.05,\ i = 0, 1, 2, \dots 10,$$

поместив их в таблицу:

x_i	1.5	1.55	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9	1.95
$f(x_i)$	-89,4	-90.2	-91.2	-91.8	-92.08	-92.12	-91.9	-91.4	-90.5	-89.4

Из таблицы определяем $x^* \approx 1.75$, $f^* \approx -92.12$.

Пример 1.4 Площадь поверхности сферы S равна 27π. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу.

Положим высота цилиндра – h, радиус сферы – R, радиус цилиндра - r

По условию

$S = 4*\pi*R^2 = 27*\pi \to R^2 = 27/4$, $R = 3*\sqrt{3}/2$.

Для цилиндра, имеем

$r^2 = R^2 – (h/2)^2 = (27 – h^2)/4$

Объем цилиндра $V(h) = \pi*r^2*h = \pi*(27*h – h^3)/4$

По смыслу задачи $0 < h < 2*R$, то есть $0 < h < 3*\sqrt{3}$.

Исследуем функцию $V(h) = \pi*(27*h – h^3)/4$

Производная $V'(h) = \pi*3*(9 – h^2)/4$ при h = 3 меняет знак с «+» на « - «.

Значит при h = 3 объем цилиндра будет наибольшим.

Задания 1.1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций

$f(x) = x^4 – 2*x^2 + 3$

$f(x) = (x^3 – 15*x^2 + 7*x + 1)/10$

$f(x) = x * \exp(x^2/2)$

$f(x) = x^2 / (1+ x^2)$

Задание 1.2 Шоссе пересекает местность с запада на восток. В 9 км к северу от шоссе находится лагерь, а в 15 км к востоку от ближайшей на шоссе к лагерю точки расположен город. Каков должен быть маршрут, чтобы добраться в город в кратчайший срок, если скорость движения по полю 8 км/ч, а по шоссе — 10 км/ч?

Задание 1.3 Найти минимум функции
φ (x) = x^4 + 3* x^3 -13* x^2 – 6*x + 26
Змечание: Известно, что экстремуму функции соответствуют корни уравнения $d\varphi/dx = 0$; минимуму $d^2\varphi/dx^2 > 0$

Задания 1.4 Методом перебора найти точку минимума x* функции f (x) на отрезке [a, b] с точностью ε и минимальное значение f*:
f(x) = x^2 – 3* x + x*ln(x), [a,b] =[1,2], ε = 0.05;
f(x) = 0.5*x^2 – sin(x), [a,b] =[0,1], ε = 0.03;
f(x) = x^3 /3 – 5* x + x*ln(x), [a,b] =[1.5,2], ε = 0.02;

2. Методы сокращения отрезка поиска.

Методы основаны на построении последовательности отрезков [a_n, b_n], которые стягивают отрезок к точке локального минимума x, функции f(x).

2.1. Метод деления отрезка пополам.

Функция f(x) унимодальна на отрезке [a,b]. Требуется найти минимум функции с погрешностью ε.
Алгоритм:

1. Выберем δ ∈ (0, 2*ε). Положим a_0 = a, b_0 = b . Найдем две точки
   $x_1^{(0)} = \frac{a_0+ b_0-\delta}{2}$, $x_2^{(0)} = \frac{a_0+ b_0+\delta}{2}$
   Вычислим значения функции f($x_1^{(0)}$) , f($x_2^{(0)}$)
2. Определим новый отрезок поиска [a_1, b_1]
   - Если f($x_1^{(0)}$) <= f($x_2^{(0)}$) , то $a_1 = a_0$; $b_1 = x_2^{(0)}$;
   - Если f($x_1^{(0)}$) > f($x_2^{(0)}$) , то $a_1 = x_1^{(0)}$; $b_1 = b_0$;

   На новом отрезке поиска [a_1, b_1] рассмотрим точки

   $x_1^{(1)} = \frac{a_1+ b_1-\delta}{2}$, $x_2^{(1)} = \frac{a_1+ b_1+\delta}{2}$
   Вычислим значения функции f($x_1^{(1)}$) , f($x_2^{(1)}$)
3. i (i >= 1). Определим новый отрезок поиска [a_i, b_i] -
   $x_1^{(i-1)} = \frac{a_{i-1}+ b_{i-1}-\delta}{2}$, $x_2^{(i-1)} = \frac{a_{i-1}+ b_{i-1}+\delta}{2}$
   Сравним значения функций f($x_1^{(i-1)}$) , f($x_2^{(i-1)}$)
   - Если f($x_1^{(i-1)}$) <= f($x_2^{(i-1)}$) , то $a_i = a_{i-1}$; $b_i = x_2^{(i-1)}$;
   - Если f($x_1^{(i-1)}$) > f($x_2^{(i-1)}$) , то $a_i = x_1^{(i-1)}$; $b_1 = b_{i-1}$;

   Поиск заканчивается, усли длина интервала поиска [a_i, b_i] на текущей итерации i становится не больше заданной точности ε:

$$|b_i - a_i| \leq \varepsilon$$

В качестве приближения точки минимума x* выбирается любая точка интервала, например, $x^* = (a_n + b_n)/2$, а в качестве приближения минимального значения функции f* — величина $f(x^*)$.

Пример 2.1 Методом деления отрезка пополам найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции

$f(x) = x^4 + 8*x^3 – 6*x^2 – 72*x$

на отрезке [1.5, 2] с грешностью $\epsilon = 0.05$.

Решение:

Проверим является ли функция f(x) унимодальной на отрезке [1.5, 2]. Вторая производная функции $d^2f/dx^2 = 12*x^2 + 48*x – 12$ обращается в ноль в точках $x_1 = -2+\sqrt{5}$, $x_2 = -2-\sqrt{5}$. Следовательно f(x) унимодальна при $x > -2+\sqrt{5}$. В частности, унимодальна на отрезке [1.5, 2].

Положим $\delta = 0.02 < 2*\varepsilon = 0.1 \in (0, 2*\varepsilon)$.

Полагаем $a_0 = 1.5$ $b_0 = 2$. Находим две точки и значения функции в них

$x_1 = (a_0 + b_0 - \epsilon)/2$; $x_2 = (a_0 + b_0 + \epsilon)/2$; $f(x_1)$; $f(x_2)$

Если $f(x_1) < f(x_2)$, то $a_1 = a_0$ $b_1 = x_2$

Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $a_1 = x_1$ $b_1 = b_0$

и т.д.

В данном случае приходим к ответу $f^* = -92.13$ при $x^* = 1.72$.

Задание 2.1. Методом деления отрезка пополам найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции

$f(x) = x^2 - 3*x + x*\ln x$

на отрезке [1, 2] с грешностью $\epsilon = 0.05$.

2.2. Метод золотого сечения.

В методе золотого сечения две внутренние точки, которые используются для сокращения отрезка поиска, выбираются таким образом, чтобы одна из них использовалась с той же целью и на следующем уже сокращенном отрезке. Данное правило выбора точек приводит к тому, что число вычислений функции сокращается вдвое и одна итерация требует расчета только одного нового значения функции. Такими свойствами обладают точки, называемые точками золотого сечения.

Точка производит золотое сечение отрезка, если отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длин большей части к меньшей.

В методе золотого сечения на отрезке [a, b] симметрично относительно его концов выбираются точки x_1 и x_2, такие что

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2}$$

При этом точка x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка [a, x_2], а точка x_2 — первой точкой золотого сечения отрезка [x_1, b]. Зная одну из точек золотого сечения отрезка [a, b], другую можно найти по одной из формул

$$x_1 = a + b - x_2, \quad x_2 = a + b - x_1$$

Обозначим:

$Y = b - a$; $Y_2 = b - x_1$; $Y_1 = x_1 - a$.

Тогда, справедливо:

$$\frac{Y}{Y_2} = \frac{Y_2}{Y_1} \rightarrow \frac{Y}{Y - Y_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_1} \rightarrow \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - z}{z} \quad \langle z = \frac{Y_1}{Y} \rangle \; 1 - 3z + z^2 = 0$$

Корень $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.382$. Соответственно

$Y_1 = z*Y = 0.382*(b - a)$: $x_1 = a + Y_1 = a + 0.382*(b - a)$

$x_2 = a + b - x_1 = a + b - a - 0.382*(b - a) = a + 0.618*(b - a)$

Пусть функция f (x) унимодальна на отрезке [a, b] и требуется найти точку минимума x* функции f (x) на отрезке [a, b] с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм:

0. Имеем начальный отрезок поиска [a_0, b_0]

Вычисляем $x_1^{(0)} = a_0 + 0.382*(b_0 - a_0)$

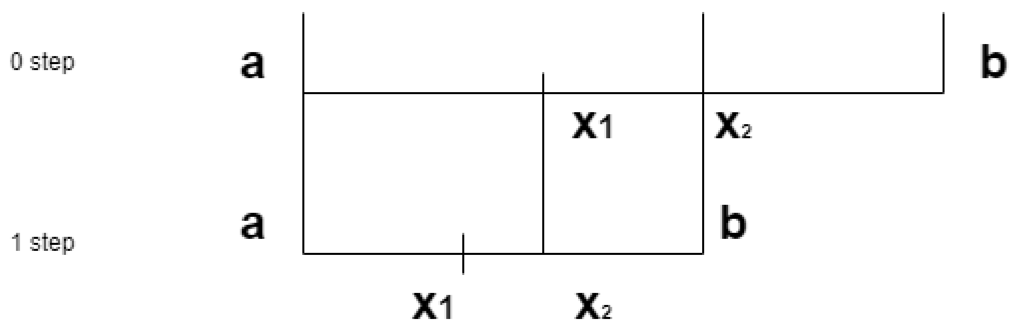
$x_2^{(0)} = a_0 + 0.618*b_0 - a_0)$

$f(\, x_1^{(0)}\,)$, $f(\, x_2^{(0)}\,)$

1. Определяем новый отрезок поиска [a_1, b_1]

- если $f(\, x_1^{(0)}\,) <= f(\, x_2^{(0)}\,)$, то

$a_1 = a_0$, $b_1 = x_2^{(0)}$, $x_2^{(1)} = x_1^{(0)}$, $x_1^{(1)} = a_1 + b_1 - x_1^{(0)}$



- если $f(\, x_1^{(0)}\,) > f(\, x_2^{(0)}\,)$, то

$a_1 = x_1^{(0)}$, $b_1 = b_0$, $x_1^{(1)} = x_2^{(0)}$, $x_2^{(1)} = a_1 + b_1 - x_2^{(0)}$

На новом отрезке поиска [a_1, b_1] вычислим только значение функции в точке $x_1^{(1)}$ в случае $f(\, x_1^{(1)}\,)$ или в точке $x_2^{(1)}$ в случае $f(\, x_2^{(1)}\,)$.

i>=2. Определим новый отрезок поиска [a_i, b_i] и точки $x_1^{(i)}$ и $x_2^{(i)}$ золотого сечения отрезка [a_i, b_i] следующим образом. Сравним значения функции $f(\ x_1^{(i-1)}\ )$ и $f(\ x_2^{(i-1)}\ )$:

- если $f(\ x_1^{(i-1)}\ ) <= f(\ x_2^{(i-1)}\ )$, то

$a_1 = a_{i-1}$, $b_i = x_2^{(i-1)}$, $x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)}$, $x_1^{(i)} = a_i + b_i - x_1^{(i-1)}$

- если $f(\ x_1^{(i-1)}\ ) > f(\ x_2^{(i-1)}\ )$, то

$a_i = x_1^{(i-1)}$, $b_i = b_{i-1}$, $x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)}$, $x_2^{(i)} = a_i + b_i - x_2^{(i-1)}$.

Поиск заканчивается, если длина интервала поиска [a_i, b_i] на текущей итерации i становится не больше заданной точности ε:

$$|b_n - a_n| \le \varepsilon$$

Задание 2.2 Методом золотого сечения найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции f(x) = $2*x^2 - 12*x$ на отрезке [0,8] с погрешностью ε = 1.