

3. Оптимизация функции нескольких переменных

3.1. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассматривается задача безусловной оптимизации целевой функции

$$f(x): R^n \rightarrow R$$

$$f(x) \rightarrow \text{extr}, x \in R^n$$

Определения

Градиент функции $\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right)$

Если в точке $x^* \in R^n$ выполняются условия:

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ или } \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

то точка $x^* \in R^n$ называется стационарной точкой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Матрица Гессе

$$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – симметричная матрица размером $n \times n$.

Матрица A положительно определенная, если для любого $h \neq 0$

$$(h, Ah) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j > 0$$

Если $(h, Ah) < 0$ то матрица A — отрицательно определенная.

Критерий Сильвестра. Симметричная матрица A является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны $\det A_k > 0$.

Необходимым и достаточным условием неотрицательной определенности симметричной матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) является выполнение следующих неравенств:

$$a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0, \dots, a_{nn} \geq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0,$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка

Пусть функция $f(x): R^n \rightarrow R$ дифференцируема в точке $x^* \in R^n$.

Если x^* — точка безусловного локального экстремума $f(x)$, то $\nabla f(x^*) = 0$.

Необходимое условие экстремума 2-го порядка

Пусть функция $f(x): R^n \rightarrow R$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* — точка безусловного локального минимума функции $f(x)$, то матрица Гессе

$$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

неотрицательно определенная.

Достаточные условия экстремума

Пусть функция $f(x): R^n \rightarrow R$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$.

Для того чтобы x^* являлась точкой безусловного локального минимума функции $f(x)$, достаточно:

— чтобы $\nabla f(x^*) = 0$

— матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно определенной

Для того чтобы x^* являлась точкой безусловного локального максимума функции $f(x)$, достаточно:

— чтобы $\nabla f(x^*) = 0$

— матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно определенной.

Общая схема отыскания безусловного экстремума функции:

1. Найти точки возможного экстремума функции $f(x)$ (критические):
 - точки, в которых $\nabla f(x) = 0$ — стационарные точки функции $f(x)$;
 - точки, в которых частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, не существуют.
2. Анализировать выполнение достаточных условий экстремума.
3. Вычислить $f_{\text{экстр}}(x)$.

Пример 3.1 Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^* x_2 - \frac{1}{2^*(x_1 + x_2)}.$$

Решение.

1. Определим градиент функции

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) = \left(x_2 + \frac{1}{2^*(x_1 + x_2)^2}, x_1 + \frac{1}{2^*(x_1 + x_2)^2} \right)$$

и матрицу Гессе $H(x)$:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x_1 + x_2)^3} & 1 - \frac{1}{(x_1 + x_2)^3} \\ 1 - \frac{1}{(x_1 + x_2)^3} & -\frac{1}{(x_1 + x_2)^3} \end{pmatrix}$$

Найдем стационарные точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, в которых может быть экстремум, используя необходимое условие экстремума

$\nabla f(x^*) = 0 \rightarrow x_2 + \frac{1}{2*(x_1+x_2)^2} = 0, x_1 + \frac{1}{2*(x_1+x_2)^2} = 0$. Вычитая и складывая эти два уравнения, приходим к значениям критической точки

$$x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Матрица Гессе

$$H(x^*) = H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Главный минор второго порядка матрицы $H(x^*)$

$$\det H_2(x^*) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Главные миноры разного знака. Следовательно экстремума в точке

$$x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

нет.

Пример 3.2 Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2) = e^{2*x_1} * (x_1 + x_2^2 - 2x_2).$$

Решение.

1. Определим градиент функции

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \nabla f(x_1, x_2) = \\ &= (e^{2*x_1} * (2 * x_1 + 2 * x_2^2 - 4 * x_2 + 1), e^{2*x_1} * (2 * x_2^2 - 2)) \end{aligned}$$

и матрицу Гессе $H(x)$:

$$H(x) = H(x_1, x_2) =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2*x_1} * (4 * x_1 + 4 * x_2^2 - 8 * x_2 + 4) & e^{2*x_1} * (4 * x_2 - 4) \\ e^{2*x_1} * (4 * x_2 - 4) & e^{2*x_1} * 2 \end{pmatrix}$$

Найдем стационарные точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, в которых может быть экстремум, используя необходимое условие экстремума

$$\nabla f(x^*) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{2*x_1} * (2 * x_1 + 2 * x_2^2 - 4 * x_2 + 1) = 0, \\ e^{2*x_1} * (2 * x_2^2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 1$; $x_1 = 0.5$. Приходим к значению критической точки

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Матрица Гессе $H(x)$:

$$H(x^*) = H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 * e & 0 \\ 0 & 2 * e \end{pmatrix}$$

Главные миноры положительны

$$\det H_1(x^*) = 2 * e > 0, \quad \det H_2(x^*) = \begin{vmatrix} 2 * e & 0 \\ 0 & 2 * e \end{vmatrix} = 4 * e^2 > 0.$$

В точке

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

функция имеет минимум и принимает значение $f_{\min}(0.5, 1) = -e/2$

Задания.

Исследовать на максимум и минимум следующие функции:

a) $f(x) = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 + x_2$;

b) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$.

3.2. Экстремальные значения функции нескольких переменных в замкнутой области

Рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R^n$ где X непусто и компактно (ограничено и замкнуто)

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ в области $x \in X$ следует:

— найти критические точки внутри области X , вычислить в них значения функции $f(x)$;

— найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на границе области X ;

— сравнить найденные значения и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Пример 3.3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{в области} \quad X : x_1^2 + x_2^2 \leq a^2.$$

Решение.

1. Найдем критические точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$ внутри области X .

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2 * x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2 * x_2 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Функция $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ имеет одну критическую точку $(0,0)$ внутри области X . Вычислим значения функции $f(x)$ в точке $(0,0)$:

$$f(0,0) = e^{0+0} = 1 \quad X : x_1^2 + x_2^2 \leq a^2.$$

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на границе Γ области $X : x_1^2 + x_2^2 = a^2$.

$$f(x) = f(x_1, x_2)|_{\Gamma} = e^{a^2}$$

3. Сравнивая результаты, получим наибольшее значение функции $f(x) = e^{a^2}$, наименьшее значение функции $f(0,0) = 1$.

Задания.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = f(x_1, x_2) = -2x_1^3 - 6x_1 x_2 + 3x_2^2$ в области X , ограниченной осью Ox_2 , прямой $x_2 = 2$ и параболой $x_2 = \frac{x_1^2}{2}$.

Пояснения:

- Критические точки $(0,0)$, $(1,1)$. Внутри области – критическая точка $(1,1)$.
Значение функции $f(1,1) = -1$.

Ответ: Наибольшее значение функции $f(0,2) = 12$; наименьшее значение функции $f(1,1) = -1$.

б) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{2} - 3$ в области

$X: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2$

Пояснения:

- Возможны варианты критических точек (из условия $\nabla f(x_1, x_2) = 0$)
 $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1/3, 2/3)$. Внутри области функция имеет только одну критическую точку $(1/3, 2/3)$.

Ответ: Наибольшее значение функции $f(1/3, 2/3) = -79/27$; наименьшее значение функции $f(1,2) = -5$.