

5. Линейное программирование

Рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \in R^n$, причем функция $f(x)$ и система ограничений, определяющих множество X , линейны относительно переменных $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

при ограничениях (матрица ограничений – равенств)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n = b_l, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(l+1)}x_1 + a_{(l+1)}x_2 + \cdots + a_{(l+1)n}x_n \leq b_{l+1}, \\ \quad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

Задача линейного программирования в векторной форме (канонический вид)

$$\begin{aligned} f(x) = (c, x) &\rightarrow \min \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

где x – вектор неизвестных, c – вектор коэффициентов целевой функции.

Пример 5.1

Составить математическое описание задачи об оптимальном производстве деталей.

Для изготовления деталей двух видов требуется проделать ряд операций на трех машинах. Время обработки одной детали первого типа на первой машине 11 минут, на второй — 7 минут, на третьей — 6 минут; время обработки одной детали второго типа соответственно 9, 12 и 16 минут на каждой из машин. В течение месяца первая машина работает 9850 минут, вторая — 8150 минут, третья — 9600 минут. Одна деталь первого типа приносит доход 900 условных единиц, второго типа — 1000 условных единиц. Сколько нужно ежемесячно производить деталей каждого типа, чтобы иметь максимальную общую прибыль?

Решение

Обозначим: x_1, x_2 — количество произведенных деталей первого и второго типов соответственно, очевидно, $x_1 > 0, x_2 > 0$. Тогда время обработки

$$11 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 9850$$

$$7 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 8150$$

$$6 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 = 9600$$

Обозначим f прибыль от производства деталей двух типов (общая прибыль). При изготовлении x_1, x_2 единиц продукции, имеем

$$f = f(x_1, x_2) = 900 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2$$

Математическое описание задачи об оптимальном производстве принимает вид

$$f = f(x_1, x_2) = 900 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 11 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 9850, \\ 7 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 8150, \\ 6 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 = 9600, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5.1

Для изготовления каждого из двух типов продукции А и В используются три вида сырья. Количество сырья первого вида, необходимое для изготовления единицы продукции типа А 8 кг, второго вида — 12 кг, третьего вида — 4 кг; количество сырья, необходимое для изготовления единицы продукции типа В соответственно 8, 6 и 12 кг каждого из видов. Общее количество сырья первого вида, которое может быть использовано, 2800 кг, второго вида — 3600 кг, третьего вида — 3200 кг. Единица продукции типа А приносит доход 24000 рублей, типа В — 16000 рублей. Определить максимально возможную прибыль при существующих запасах сырья и используемой технологии производства.

Пояснения.

Обозначим: x_1, x_2 — количество произведенной продукции типа А и В соответственно, очевидно, $x_1 > 0, x_2 > 0$. Обозначим через f прибыль от производства продукции указанных типов.

$$f = f(x_1, x_2) = 24000 \cdot x_1 + 16000 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$8 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 2800$$

$$12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 3600$$

$$4 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 3200$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача в каноническом виде

$$f = f(x_1, x_2) = 24000 \cdot x_1 + 16000 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 350$$

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 + x_4 &= 600 \\
 x_1 + 3x_2 + x_5 &= 800 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Графический метод

Пример 5.2 Задача линейного программирования (графическим методом)

Найти $x - 2y \rightarrow \min, \max$ (5.1)

Ограничения $5x + 3y \geq 30,$
 $x - y \leq 3,$ (5.2)
 $-3x + 5y \leq 15,$
 $x \geq 0, y \geq 0.$

Решение. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами (ограничениями).

Строим прямые (по двум точкам каждую):

$5x + 3y = 30,$ точки $(6, 0), (0, 10).$

$x - y = 3,$ точки $(3, 0), (6, 3).$

$-3x + 5y = 15,$ точки $(0, 3), (5, 6).$

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств.

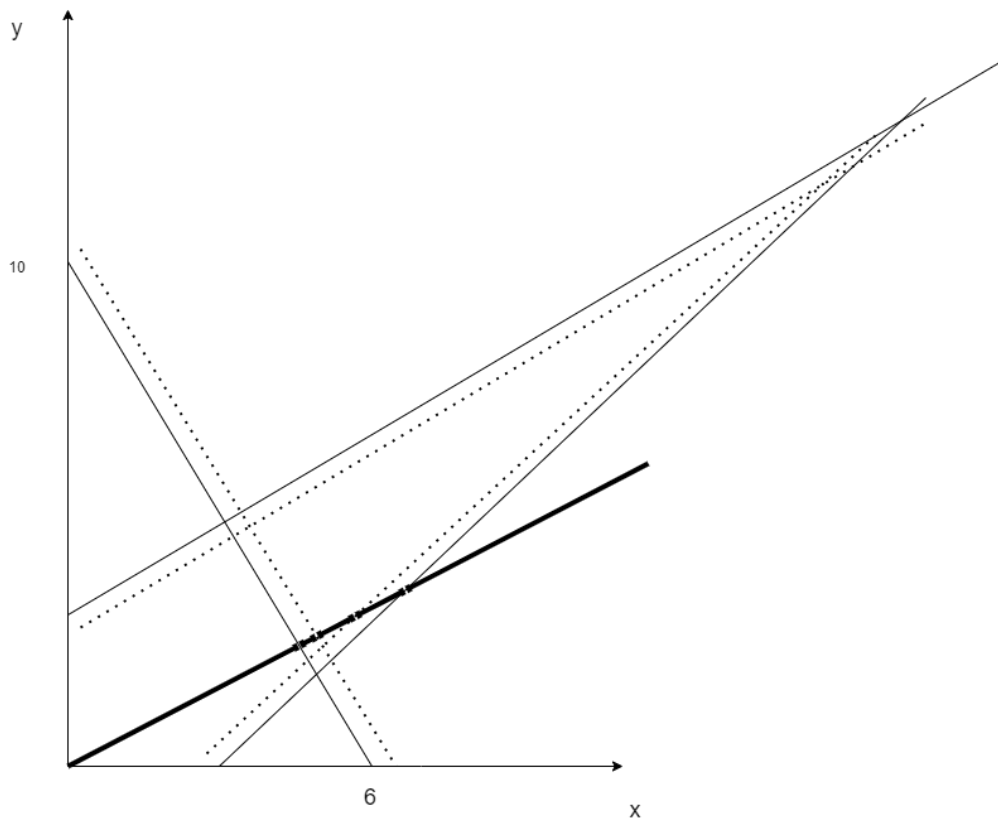


Рис.5.1 Область, ограниченная неравенствами (5.2)

Построим прямую, отвечающую уравнению $x - 2*y = 0$. Видно, что это прямая, проходящая через точки (2,1) и точку (0,0). Данная прямая пересекает область допустимых значений в точках, лежащих на границах области. Тогда $\min(x - 2*y) = 2.5$. Причем $\min$ достигается в точке (4.5, 2.4).
 $\max(x - 2*y) = 3.6$. Причем $\max$ достигается в точке (6.7, 3.6).

Пример 5.3 Задача линейного программирования. Использовать графический метод
 Найти

$$F(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_5 + 14x_6 \rightarrow \min,$$

Ограничения

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 20, \\ x_2 + x_5 &= 50, \\ x_3 + x_6 &= 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 60, \\ x_k &\geq 0, k = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

Решение

Решая систему ограничений-равенств относительно базисных переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , имеем

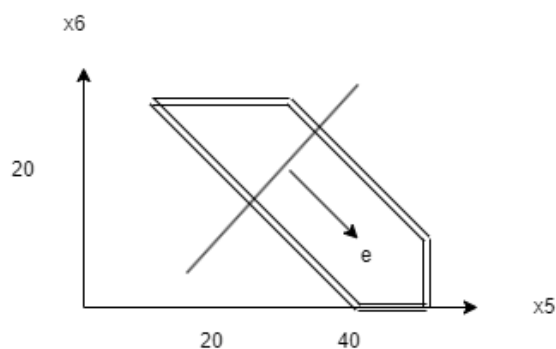
$$\begin{aligned} x_1 &= -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 &= 50 - x_5, \\ x_3 &= 30 - x_6, \\ x_4 &= 60 - x_5 - x_6 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Исключая переменные $x_1, \dots, x_4$ из выражения для целевой функции, имеем -
 $F(x) = 740 - 7x_5 + 7x_6 \rightarrow \min$.

С учетом $x_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, 6$ приходим к задаче:

$$\begin{aligned} F(x) &= 740 - 7x_5 + 7x_6 \rightarrow \min. \\ x_5 + x_6 &\geq 40, \\ x_5 &\leq 50, \\ x_6 &\leq 30, \\ x_5 + x_6 &\leq 60, \\ x_5 &\geq 0, x_6 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Антиградиент $-\nabla F(x) = (7, -7) = e$ указывает направление убывания функции $F(x)$



Совершая параллельный перенос линии уровня $-7x_5 + 7x_6 = C$ функции $F(x)$ вдоль направления e , находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-7x_5 + 7x_6 = C$ проходит через вершину $(50,0)$ многоугольника, отвечающего условиям (5.4).

С учетом (5.3) находим, что целевая функция принимает минимальное значение F^* в точке $x^* = (10,0,30,10,50,0)$, причем

$$F^*(x^*) = F(10,0,30,10,50,0) = -390$$

Задача 5.2

Решить графическим методом задачу

$$-x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + x_2 \geq -1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Задача 5.3

Решить графическим методом задачу

$$-x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Минимизация функционала в рамках GNU Octave

Пример 5.4. Минимизация квадратичной функции с ограничениями:

минимизировать $(x-3)^2 - (y-4)^2$

при условии $3x + 2y - 7 \geq 0$

$$-10x + y + 8 \geq 0$$

$$18x - 4y + 12 \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Используем функцию `sqp` Octave, которая предназначена для решения классических оптимизационных задач

`[x,obj,info,iter]=sqp(x0,phi,g,h,lb,ub,maxiter,tolerance),`

`x` – точка, в которой функция, достигает своего минимального значения,

`obj` – минимальное значение функции,

`info` – параметр, характеризующий корректность решения,

`iter` – количество итераций при решении задачи,

`x0` – начальное приближение значения `x`,

`phi` – оптимизируемая функция,

`φ( x )`, `g` и `h` – функции ограничений `g( x )=0` и `h( x )≥0` соответственно,

`lb` и `ub` – верхняя и нижняя границы ограничения `lb≤x≤ub`,

maxiter – максимальное количество итераций = 100, оптимизационной задачи,
по умолчанию эта величина равна 100,
tolerance – точность ε .

Решение:

```
x0 = [0;0];  
[x, obj, info, iter]= sqp(x0, @z, [], @g_lim)
```

Функции:

```
function retval = z (x)    % в файле z.m  
retval = (x(1)-3)^2+ (x(2) - 4)^2;  
endfunction % в файле z.m
```

```
function retval = g_lim (x) % в файле g_lim  
retval=[3*x(1)+3*x(2)-7;  
-10*x(1)+x(2)+8;  
18*x(1)-4*x(2)+12;  
x(1);  
x(2)];  
endfunction
```

Листинг с ответом

x =

1.2178
4.1782

obj = 3.2079

info = 104

iter = 5

Функция sqp ищет только минимум. Для поиска max воспользуемся
 $\max f(x) = -\min f(-x)$.

Решение

```
x0 = [0;0];  
[x, obj, info, iter]= sqp(x0, @z1, [], @g_lim)
```

Функции:

```
function y=z1(x)          % в файле z1.m  
y=-z(-x);  
endfunction
```

Листинг с ответом

x =

12

obj = -281

info = 104

iter = 3

Задача 5.4. Минимизация квадратичной функции с одним квадратичным ограничением:

минимизировать $0.7*(x-y)^2 + 0.1*(x+y)^2$

при условии $(x-4)^2 + (y-6)^2 \leq 9$