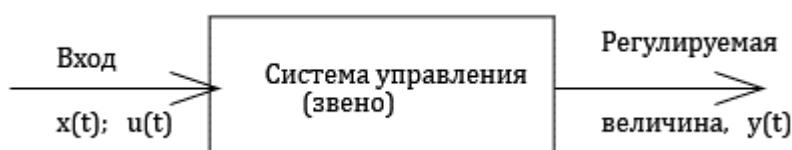


1. Динамические характеристики автоматических систем

При составлении уравнений, описывающих нестационарные процессы в САУ (САР) и которые в дальнейшем будем называть уравнениями динамики, система “разбивается” на отдельные элементы (звенья), для каждого из которых не существует проблем в записи соответствующего уравнения динамики.

На рисунке представлено схематичное представление САУ (звена) в переменных «вход-выход», где $x(t)$ (или $u(t)$) — входное воздействие, а $y(t)$ — выходное воздействие, соответственно. Входное воздействие будет называться управляющим, а выходное воздействие — регулируемой величиной (переменной).



В теории автоматического управления при рассмотрении тех или иных систем имеют место различные воздействия и сигналы. Анализ и синтез конкретных автоматических систем существенно упрощается, если пользоваться разработанной типизацией этих воздействий и сигналов. Математическим представлением сигналов является некоторая функция времени, определяющая закон его изменения, заложенный в нем независимо от физической природы. В зависимости от характера изменения сигнала во времени, формы математического представления различают регулярные — детерминированные и нерегулярные — случайные сигналы.

В динамической системе воздействие и реакция являются функциями времени. Причем текущее значение реакции определяется не только текущим, но и предыдущими значениями воздействия.

Исследование свойств автоматической системы предполагает:

- определение факта ее устойчивости;
- анализ качества перехода системы из одного состояния в другое;
- исследование точности автоматической системы в установившемся режиме.

Реакция системы на типовые воздействия (импульсное, степенное, гармоническое) оценивается динамическими характеристиками.

1.1. Переходная функция

Определим сигнал «единичный скачек» в виде (функция Хевисайда)

$$l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Реакция объекта на единичный скачек (1.1) называется переходной функцией $h(t)$. Предполагается, что объект в начальный момент имеет нулевые начальные условия. В частном случае, под реакцией понимается – решение уравнений, отвечающих модели объекта. Такого рода воздействию соответствует, например, сбросу или включению нагрузки в системах регулирования (отказ мотора в системе регулирования). Кривой разгона называется реакция объекта (системы) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. На практике кривая разгона определяется экспериментальным путем и используется в качестве исходных данных для анализа и синтеза систем автоматического управления исследуемом объектом.

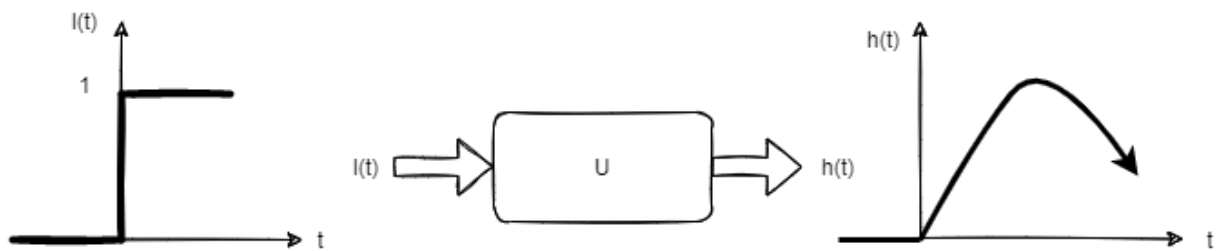


Рис.1.1. Реакция объекта $h(t)$ на единичный скачек $l(t)$

Пусть модель объекта задана дифференциальным уравнением первого порядка -

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

где k коэффициент, T , сек. Найдем переходную характеристику этого звена. Решение уравнения при $x(t) = 1$ ($t > 0$)

$$y(t) = k + C_1 \exp\left(-\frac{t}{T}\right),$$

где постоянная C_1 должна определяться из начальных условий. Для переходной характеристики должны положить $y(0) = 0$, что приводит $C_1 = -k$. Переходная функция –

$$h(t) = y(t) = k \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right] \quad (1.1a)$$

Чем больше постоянная времени T , тем медленнее реагирует объект на управление (выше инерционность звена).

Спектральная характеристика для единичного скачка:

$$F(i\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Задание: Исследовать зависимость переходной функции $h(t)$ (1.1a) от значений k и T .

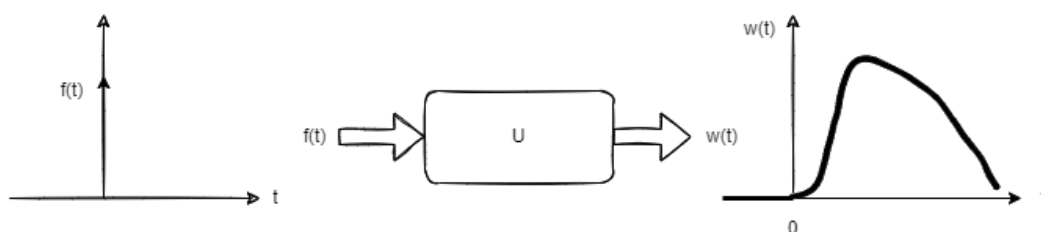
2.1. Импульсная характеристика (весовая функция)

В качестве тестового входного сигнала можно подать любой сигнал. Можно подать прямоугольный импульс. В пределе прямоугольный импульс – единичный импульс или дельта-функция Дирака $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2)$$

Иногда определяют дельта-функцию как производную от единичного ступенчатого сигнала $1(t)$. Действительно, эта производная равна нулю при всех значениях t , кроме нуля, где она обращается в бесконечность.

Реакция системы на единичный импульс (дельта-функцию) называется импульсной характеристикой и обозначается $w(t)$:



Импульсная характеристика, так же, как и переходная характеристика, определяется при нулевых начальных условиях, то есть, первоначально объект должен находиться в состоянии покоя. Рассматривая дельта-функцию как предельный случай прямоугольного сигнала единичной площади, можно найти связь между переходной функцией $h(t) = y(t)$ и импульсной характеристикой $w(t)$.

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Дифференцируя переходную характеристику звена первого порядка (1.1a), получаем соответствующую импульсную характеристику:

$$w(t) = \frac{d}{dt} \left(k \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right] \right) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (1.3a)$$

Другое название импульсной характеристики – весовая функция. Это название связано с тем, что для произвольного входного сигнала $x(t)$ выход системы $y(t)$ при нулевых начальных условиях вычисляется как интеграл

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) w(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau) w(\tau) d\tau.$$

Последнее уравнение называется интегралом Дюамеля (уравнением свертки), отражающим связь между входом, выходом объекта и его весовой функцией.

Задание:

№ 1а) Найти весовую функцию $w(t)$ по известной переходной функции

$$h(t) = 2(1 - e^{-0.2 \cdot t})$$

1.2. Преобразование Лапласа

Решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $y(t)$ записывается в виде (если нет повторяющихся корней):

$$y(t) = \sum_{i=0}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

т.е. все члены уравнения имеют одну и ту же форму.

Задача расчета выходного сигнала при известном входном сигнале может быть решена не только путем решения дифференциального уравнения, но и переходом к прямому и обратному преобразованиям Лапласа.

Для функции $f(t)$ преобразование Лапласа $L\{f(t)\}$

$$L(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.4)$$

$L(s)$ – изображение для $f(t)$, $s = j \cdot \omega$ – комплексная переменная. Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = L^{-1}\{L(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} L(s) e^{st} ds, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (1.5)$$

Например –

$$L\{\delta(t)\} = 1, \quad L\{l(t)\} = \frac{1}{s}, \quad L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a} \quad (1.6)$$

Некоторые свойства преобразования Лапласа.

1) Принцип суперпозиции выполняется как для прямого, так и для обратного преобразования Лапласа.

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}, \\ L^{-1}\{L_1(s) + L_2(s)\} = L^{-1}\{L_1(s)\} + L^{-1}\{L_2(s)\}$$

$$2) \quad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s * L(s) - f(0)$$

$f(0)$ – значение функции f при $t = 0$.

При нулевых начальных условиях изображение производной равно изображению самой функции, умноженному на s .

Начальное и конечное значения функции оригинала (при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$)

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s * L(s), \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * L(s)$$

3) Запаздывание

Если $f(t) \rightarrow L(j\omega)$, то $f(t - \tau) \rightarrow e^{-j\omega\tau} L(j\omega)$.

4) Смещение спектра

Если $f(t) \rightarrow L(j\omega)$, то $e^{-j\omega_0 t} \cdot f(t) \rightarrow L(j(\omega - \omega_0))$.

Пример.

Требуется найти преобразование Лапласа от функции $x(t) = e^{-\alpha t}$. Согласно определению преобразования Лапласа (1.4), имеем

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s + \alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}$$

Таким образом,

$$e^{-st} \rightarrow \frac{1}{s + a}.$$

Применение преобразования Лапласа обусловлено тем, что изображение некоторых функций оказывается проще их оригиналов и ряд операций, таких как интегрирование, дифференцирование над изображениями проще, чем соответствующие операции над оригиналами.

Для большинства функций, встречающихся на практике, составлены таблицы соответствия между оригиналами и изображениями. Изображения некоторых наиболее часто встречающихся функций в теории управления приведены в таблице.

Таблица преобразования Лапласа

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
1	$1/s$	$\cos \omega t$	$s / (s^2 + \omega^2)$
t	$1/s^2$	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\omega / [(s + \alpha)^2 + \omega^2]$
t^n	$n! / s^{n+1}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$(s + \alpha) / [(s + \alpha)^2 + \omega^2]$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s + \alpha)$	$f^{(n)}(t)$	$s^n \cdot L(s)$
$t e^{-\alpha t}$	$1/(s + \alpha)^2$	$\iint \dots f(t) dt^n$	$L(s)/s^n$
$t^n e^{-\alpha t}$	$1/(s + \alpha)^{n+1}$		

Некоторые свойства преобразования Лапласа.

1. $f(at) \leftrightarrow 1/a \cdot L(s/a)$, $(1/a) \cdot f(t/a) \leftrightarrow L(a \cdot s)$;
2. Если $f_1(t) \leftrightarrow L_1(s)$ и $f_2(t) \leftrightarrow L_2(s)$, то
 $f_1(t) + f_2(t) \leftrightarrow L_1(s) + L_2(s)$;
3. $a \cdot f(t) \leftrightarrow a \cdot L(s)$;
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)$;
5. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot L(s)$.

1.3. Передаточная функция

Одной из основных характеристик объекта управления, используемой в теории автоматического управления, является передаточная функция, записываемая в терминах преобразования Лапласа.

Передаточная функция характеризует динамику объекта только по определенному каналу, связывающему конкретный вход объекта и конкретный выход.

Положим, что модель объекта (связывающая вход $x(t)$ с выходом $y(t)$) -

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t). \quad (1.7)$$

Введем оператор дифференцирования $p = d / dt$

$$b_2 p^2 y(t) + b_1 p y(t) + b_0 y(t) = a_1 p x(t) + a_0 x(t). \\ (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) y(t) = (a_1 p + a_0) x(t)$$

$$y(t) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} * x(t) = W(p) x(t)$$

Функция $W(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$ называется передаточной функцией объекта, который описывается дифференциальным уравнением второго порядка при нулевых начальных условиях.

Часто передаточной функцией называют функцию $W(\lambda)$, которая представляет собой отношение двух полиномов (многочленов) от λ .

Передаточная функция $W(\lambda)$ называется правильной, если степень ее числителя не больше, чем степень знаменателя; строго правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя; неправильной, если степень числителя больше, чем степень знаменателя.

Нулями передаточной функции называются корни ее числителя, а полюсами – корни знаменателя.

Применим преобразование Лапласа, считая, что все начальные условия нулевые. Приходим к уравнению в изображениях, связывающее вход $X(s)$ и выход $Y(s)$

$$b_2 * s^2 Y(s) + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = a_1 s X(s) + a_0 X(s).$$

Изображение выхода

$$Y(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} * X(s) = W(s) X(s) \quad (1.8)$$

Функция

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (1.9)$$

называется передаточной функцией объекта, записанной в виде функции от комплексной переменной s .

В общем случае, **передаточной функцией объекта называется отношение преобразованного по Лапласу выхода объекта $Y(s)$ к преобразованному по Лапласу входу $X(s)$ при нулевых начальных условиях.** Передаточная функция определяется только внутренними свойствами системы. Передаточная функция характеризует динамику объекта только по определенному каналу, связывающему конкретный вход объекта и конкретный выход.

Таким образом,

- при нулевых начальных условиях изображение выхода линейного объекта вычисляется как произведение его передаточной функции на изображение входного сигнала;
- передаточная функция равна отношению изображений по Лапласу выхода и входа при нулевых начальных условиях.

Пример №1.

Пусть объект описывается дифференциальным уравнением $y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2x(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$. Найти $h(s)$ и $W(s)$.

Решение.

Применяя преобразование Лапласа к исходному уравнению:

$$s^2 y(s) + 3s y(s) + 4y(s) = 2x(s).$$

$$\text{Передаточная функция } W(s) = 2 / (s^2 + 3s + 4)$$

$$\text{Переходная функция } h(s) = 2 / [s \cdot (s^2 + 3s + 4)]$$

Пример №2.

Построить выходной сигнал звена при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях, если уравнение динамики звена имеет следующий вид:

$$T \cdot y'(t) + y(t) = k \cdot x(t)$$

начальные условия: при $t \leq 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Входное воздействие: $x(t) = 1(t)$.

Преобразование Лапласа:

$$x(t) \rightarrow X(s) = 1/s, \quad y(t) \rightarrow Y(s), \quad y' \rightarrow s \cdot Y(s).$$

Подставив в уравнение динамики получим уравнение динамики в изображениях:

$$(T \cdot s + 1) \cdot Y(s) = k \cdot X(s) \quad Y(s) = \frac{k}{(T \cdot s + 1)} \cdot X(s) = \frac{k}{(T \cdot s + 1)} \cdot \frac{1}{s};$$

$$Y(s) = \frac{k}{s \cdot (T \cdot s + 1)} ;$$

Для получения выходного сигнала из уравнения в изображениях выполним обратное преобразования Лапласа:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{k}{s \cdot (T \cdot s + 1)}\right] = \frac{1}{T} k \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s \cdot (s + 1/T)}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{s \cdot (s + 1/T)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 1/T)} \quad A=T; B=-T$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{k}{T} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot T = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Задание:

№ 1б) Требуется найти передаточную функцию звена, если на вход звена подается сигнал $x(t) = 1(t)$, а на выходе снимается сигнал $y(t) = 2\exp(-2t)$.

№ 1с) Найти передаточную функцию звена $W(s)$ по известной весовой функции $w(t) = 5 \cdot t$.

1.4. Решение дифференциальных уравнений

Одним из важнейших применений операционного исчисления – преобразования Лапласа – является решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которыми описываются системы автоматического управления. Решение дифференциального уравнения в этом случае складывается из следующих этапов:

- 1) преобразование уравнения по Лапласу;
- 2) отыскание решения в области комплексного переменного s ;
- 3) переход в область действительного переменного путем обратного преобразования Лапласа.

Пример.

Положим, что реакция системы на единичный скачек $l(t)$ описывается

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 l(t),$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Преобразуем по Лапласу:

$$b_2 s^2 y(s) + b_1 s y(s) + b_0 y(s) = a_0 \cdot 1/s$$

откуда

$$y(s) = \frac{a_0}{s \cdot (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}.$$

Если полином $b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$ имеет корни s_1 и s_2 , то

$$y(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2},$$

где коэффициенты определяются методом неопределенных коэффициентов

$$C_0 = \frac{a_0}{s_1 \cdot s_2}; \quad C_1 = \frac{a_0}{s_1 \cdot (s_1 - s_2)}; \quad C_2 = \frac{a_0}{s_2 \cdot (s_2 - s_1)}.$$

Пользуясь таблицами обратного преобразования Лапласа, находим

$$y(t) = C_0 + C_1 e^{s_1 \cdot t} + C_2 e^{s_2 \cdot t}.$$

Полученное выражение $y(t)$ является решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка при входном сигнале $x(t) = 1(t)$, т.е. ничем иным, как переходной функцией для линейного объекта второго порядка.

В общем случае, при определении оригинала по полученному изображению используются следующие формулы соответствия:

$$\frac{A}{s - s_1} \Rightarrow A e^{s_1 \cdot t};$$

$$\frac{A}{(s - s_1)^k} \Rightarrow A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_1 \cdot t};$$

$$\frac{As + B}{(s^2 + a \cdot s + b)} \Rightarrow e^{-\frac{a}{2}t} \left[A \cos t \cdot \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} + \frac{B - \frac{Aa}{2}}{b - \frac{a^2}{4}} \sin t \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \right].$$

Пример.

Найти оригинал если изображение

$$\frac{s^2 + 2}{(s + 1)^3(s - 2)}.$$

Разложение на простейшие дроби:

$$\frac{s^2 + 2}{(s + 1)^3(s - 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{(s + 1)^3} + \frac{B}{s - 2}.$$

приводя к общему знаменателю, из условия равенства числителей, имеем:

$$s^2 + 2 = A_1(s + 1)^2(s - 2) + A_2(s + 1)(s - 2) + A_3(s - 2) + B(s + 1)^3$$

Из равенства коэффициентов при соответствующих степенях s , имеем в систему алгебраических уравнений:

$$A_1 + B = 0; \quad A_2 + 3 \cdot B = 1; \quad A_3 - A_2 - 3 \cdot A_1 + 3 \cdot B = 0;$$

$$-2 \cdot A_3 - 2 \cdot A_2 - 2 \cdot A_1 + B = 2,$$

решение системы: $A_1 = -\frac{2}{9}$; $A_2 = \frac{1}{3}$; $A_3 = -1$; $B = 2/9$.

Следовательно -

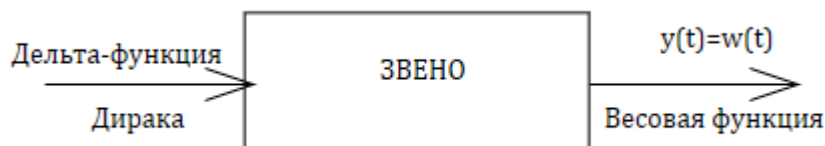
$$\frac{s^2 + 2}{(s + 1)^3(s - 2)} = \frac{-2/9}{s + 1} + \frac{1/3}{(s + 1)^2} + \frac{-1}{(s + 1)^3} + \frac{2/9}{s - 2}.$$

Используя формулы соответствия, имеем для оригинала функции:

$$-\frac{2}{9} \cdot \exp(-t) + \frac{1}{3} \cdot t \exp(-t) - \frac{1}{2} \cdot t^2 \exp(-t) + \frac{2}{9} \exp(2 \cdot t)$$

1.5. Преобразование Лапласа и динамические характеристики

Весовая и переходная функции звена – реакция звена при нулевых начальных условиях на единичное импульсное воздействие.



Единичный импульс или дельта-функция Дирака $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Реакция звена на единичный импульс (дельта-функцию) называется **импульсной характеристикой** и обозначается $w(t)$.

Преобразование Лапласа это интеграл от 0 до бесконечности по времени, а импульсное воздействие при таком интегрировании превращается в единицу $L[\delta(t)] = 1$. Тогда в изображениях получаем что:

$$Y(s) = W(s) \cdot X(s) = W(s) \cdot 1 \rightarrow Y(s) = W(s)$$

Передаточная функция играет роль изображения реакции звена или системы на единичное импульсное воздействие.



Для единичного ступенчатого воздействия преобразование Лапласа - $L[1(t)] = \frac{1}{s}$, тогда в изображениях получаем, что реакция системы $H(s)$ на ступенчатое воздействие, рассчитывается так:

$$H(s) = W(s) \cdot X(s) = W(s) \cdot (1/s) \rightarrow H(s) = W(s)/s$$

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие рассчитывается обратным преобразованием Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]$$

1.6. Определение переходного процесса в звене через весовую и переходную функции

Предположим, что на вход системы поступает произвольное воздействие $x(t)$, заранее известное. Найти реакцию системы $y(t)$, если известны входное воздействие $x(t)$ и весовая функция $w(t)$.

Представим, что входное воздействие представляет собой последовательность прямоугольных импульсов до времени t и ступеньки высотой $x(t)$ в момент времени t . Для каждого импульса мы можем записать реакцию системы через весовую функцию:

$$Y_k \approx Y_{k-1} + x(t) \cdot w(t - \Delta\tau) \cdot \Delta\tau$$

где:

Y_{k-1} — значение отклика по завершению предыдущего импульса;

$t = k \cdot \Delta\tau$ — время завершения текущего импульса;

$w(t - \Delta\tau)$ — значение весовой функции в начале текущего импульса.

Тогда для определения значения отклика в произвольный момент времени необходимо сложить все импульсы и ступенчатое воздействие в момент времени t :

$$Y(t) = h(0)x(t) + \sum_{k=0}^n x(k \cdot \Delta\tau) \cdot w(t - k \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau ;$$

Переходя к пределам $n \rightarrow \infty$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ имеем –

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^t x(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau$$

если перейти от t к бесконечности мы получим формулу интеграла Дюамеля-Карсона, или «интеграла свертки», который обеспечивает вычисление оригинала функции по произведению изображения двух функций:

$$Y(s) = L[y(t)];$$

$$W(s) = L[w(t)];$$

$$X(s) = L[x(t)];$$

если $Y(s) = W(s) \cdot X(s)$, то $y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau$

Для вывода аналогичной зависимости от переходной функции вспомним что изображение весовой $H(s)$ и переходной функции $W(s)$ связаны соотношением: $H(s) = W(s) / s$.

Запишем выражение изображения для отклика в операторной форме:

$$y(t) = L^{-1}[W(s) \cdot Y(s)] = L^{-1} \left[s \cdot \frac{W(s)}{s} \cdot Y(s) \right]$$

По Лапласу – $x(t) \rightarrow X(s)$, $\frac{d}{dt} x(t) \rightarrow sX(s)$

$$y(t) = \frac{d}{dt} L^{-1}[H(s) \cdot Y(s)]$$

Используя интеграл свертки получаем, что при известной переходной функции ($h(t)$) и известному входному воздействию $x(t)$ выходное воздействие рассчитывается как:

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty x(t) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1.7. Модель «вход-выход» в пространстве состояний. Канонический вид уравнений модели

Модель «вход-выход» в пространстве состояний рассмотрим на примере построения модели двигателя постоянного тока. Вход – напряжение якоря – $u(t)$, (в вольтах); выход – угол поворота $\theta(t)$, (в радианах). Угловая скорость вращения – $\omega(t) = d\theta(t)/dt$.

Уравнение вращательного движения -

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) - M_H(t),$$

где $M(t)$ – вращающий момент (в Н*м); $M_H(t)$ – момент нагрузки; J – момент инерции якоря и нагрузки (кг*м²). Электромагнитный момент двигателя – $M(t) = C_M * \Phi * i(t)$, C_M – коэффициент; Φ – магнитный поток (в веберах); $i(t)$ – ток якоря (в амперах), определяемый из уравнения – $u(t) = e(t) + R * i(t)$, где $e(t)$ – электродвижущая сила (ЭДС), в вольтах; R – сопротивление якорной цепи (в омах). ЭДС рассчитывается

$$e(t) = C_\omega * \Phi * \omega(t),$$

C_ω – коэффициент. Вводя $k_1 = C_M * \Phi$, $k_2 = C_\omega * \Phi$, модель двигателя:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 * i(t) - M_H(t), \quad e(t) = k_2 * \omega(t),$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad u(t) = e(t) + R * i(t)$$

Уравнения модели можно преобразовать к виду:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{k_1 k_2}{R} * \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 * u(t) - M_H(t). \quad (7.1)$$

Уравнение модели (7.1) связывает вход $u(t)$ и нагрузку $M_H(t)$ с выходом $\theta(t)$. Уравнение (7.1) называется уравнением «вход-выход». Уравнение (7.1) второго порядка.

Рассмотрим случай $M_H(t) = 0$ (отсутствия нагрузки). Уравнение (7.1) можно представить в виде системы уравнений (нормальная форма Коши) -

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{k_1 k_2}{J * R} * \omega(t) + \frac{k_2}{J} * u(t)$$

или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 k_2}{J * R} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{J} \end{bmatrix} * u(t). \quad (7.2)$$

$\theta(t)$, $\omega(t)$ – переменные состояния, $\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ – вектор состояния. Принято обозначать $x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$ – вектор состояния, $u(t)$ – сигнал управления (вход объекта).

Уравнение (7.2) обычно записывают в виде

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \quad (7.3)$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 k_2}{J * R} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{J} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (7.3) связывает вход $u(t)$ и вектор состояния $x(t)$, поэтому называется моделью вход-состояние.

Полная модель в пространстве состояний –

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t)$$

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t) \quad (7.4)$$

модель вход-состояние-выход. Если выход – угол поворота вала двигателя

$$y(t) = \theta(t) = [1 \ 0] * \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = [1 \ 0] * x(t)$$

так что $C = [1 \ 0]$ и $D = 0$. Если выход - угловая скорость, то $C = [0 \ 1]$.

Запись модели в виде (7.4) позволяет использовать единые методы и программы для анализа моделей. Фактически, мы приходим к задаче Коши, методы решения которой хорошо разработаны.

Первое уравнение (7.4) позволяет найти скорость изменения вектора состояния $x(t)$ в любой момент времени. Для малого Δt можно считать, что производная вектора состояния на интервале $0 \leq t \leq \Delta t$ не меняется. Тогда значение вектора состояния при $t = \Delta t$ можно записать

$$x(\Delta t) \approx x(0) + \dot{x}(0) \cdot \Delta t = x(0) + [A * x(0) + B * u(0)] \cdot \Delta t.$$

Зная $x(\Delta t)$ и сигнал управления $u(\Delta t)$, находим выход системы в тот же момент времени $y(\Delta t) \approx C * x(\Delta t) + D * u(\Delta t)$. Продолжая вычисления для второго интервала

$$x(2 \cdot \Delta t) \approx x(\Delta t) + \dot{x}(\Delta t) \cdot \Delta t = x(\Delta t) + [A * x(\Delta t) + B * u(\Delta t)] \cdot \Delta t,$$

$$y(2 \cdot \Delta t) \approx C * x(2 \cdot \Delta t) + D * u(2 \cdot \Delta t)$$

Таким образом, можно рассчитать выход системы при всех $t > 0$.

Переходя в модели (7.4) к изображениям сигналов по Лапласу при нулевых начальных условиях –

$$\begin{aligned} s * X(s) &= A * X(s) + B * U(s) \\ Y(s) &= C * X(s) + D * U(s) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Преобразование первого уравнения (7.5): $(s * I - A) * X(s) = B * U(s)$,
 $X(s) = (s * I - A)^{-1} * B * U(s)$

Из второго уравнения имеем –

$$\begin{aligned} Y(s) &= C * (s * I - A)^{-1} * B * U(s) + D * U(s) = \\ &= [C * (s * I - A)^{-1} * B + D] * U(s) \end{aligned}$$

Передаточная функция – отношение изображений выхода и входа

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C * (s * I - A)^{-1} * B + D$$

Обратный переход, от передаточной функции к модели в пространстве состояний, более сложен и неоднозначен. Дело в том, что каждой передаточной функции соответствует бесчисленное множество моделей в пространстве состояний. Одну из них можно найти следующим образом. Для передаточной функции

$$W(s) = d + \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

Где d, a_i ($i = 0, 1, 2$) и b_i ($i = 0, 1, 2$) – постоянные коэффициенты).

Если нас интересуют только связь входа и выхода (а не внутренние сигналы в объекте) и начальные условия нулевые, можно использовать модель первого порядка. Однако при ненулевых начальных условиях нужно

использовать исходную модель в пространстве состояний, потому что передаточная функция дает неполную информацию. Это особенно важно при анализе устойчивости системы.

Пример:

Пусть объект управления описывается уравнением первого порядка:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k * x(t) . \quad (P1.1)$$

На его вход поступает единичный ступенчатый сигнал $x(t) = 1(t)$. Известно, что реакция объекта на единичный сигнал при начальных условиях $y(0) = 0$ (переходная функция), есть решение уравнения (P1.1) -

$$h(t) = y(t) = k \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right] \quad (P1.2)$$

Требуется найти сигнал выхода $y(t)$, который, в данном случае, представляет собой переходную характеристику $h(t) = y(t)$, используя передаточную функцию и изображения по Лапласу.

Для справки.

Чтобы найти изображение выхода, нужно знать изображение входного сигнала $X(s)$ (формула (2.6)) и передаточную функцию звена $W(s)$.

$$\text{Изображение выхода } Y(s) = W(s)X(s) = \frac{k}{Ts+1} * \frac{1}{s} = \frac{k}{s} - \frac{k}{s+1/T}$$

Оригинал – сигнал выхода $y(t)$ рассчитывается с учетом принципа суперпозиции

$$y(t) = k * L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - k * L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right\}$$

Ответ:

$$y(t) = k - k * \exp\left(-\frac{t}{T}\right) , \quad \text{при } t > 0$$

что совпадает с решением, найденным при решении дифференциального уравнения (P1.2).

Задание:

№2 а). Требуется найти передаточную функцию объекта, описываемого дифференциальным уравнением

$$15 \frac{d^4}{dt^4} y(t) - 9 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 12 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 6 \frac{d}{dt} x(t) \quad (P1.3)$$

Для справки: записать уравнение (P1.3) в соответствии с правилами операционного исчисления в виде алгебраического уравнения и свернуть уравнение.

№2 б). Найти передаточную функцию объекта по известному уравнению. Начальные условия – нулевые.

$$4 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \frac{d}{dt} y(t) + 10y(t) = 5x(t)$$

№3. Пусть объект описывается дифференциальной задачей (задача Коши)

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2x(t), \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (P1.4)$$

Найти переходную функцию $h(t)$ и передаточную функцию $W(s)$.

Для справки:

Передаточной функцией объекта называется отношение преобразованного по Лапласу выхода объекта $Y(s)$ к преобразованному по Лапласу входу $X(s)$ при нулевых начальных условиях.

Переходной функцией называется аналитическое выражение для решения линейного дифференциального уравнения при входном сигнале $x(t) = 1(t)$ и нулевых начальных условиях $h(t)$.

№4. Найти передаточную функцию системы, описываемой дифференциальным уравнением вида

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k * x(t),$$

если на вход системы подается единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях.

1.8. Основные определения

Прямое преобразование Лапласа для функции $f(t)$

$$L(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = L^{-1}\{L(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} L(s) e^{st} ds, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Передаточная функция $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Переходная функция $h(t)$ - реакция объекта на единичный скачек (решение уравнения при входном сигнале $x(t) = 1(t > 0)$).

Весовая функция (импульсная характеристика) $w(t)$ - реакция системы на единичный импульс $\delta(t)$ (дельта-функция Дирака $\delta(t)$):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Связи:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

$$h(s) = \frac{W(s)}{s} \quad W(s) = s \cdot h(s)$$

1.9. Ответы

Задание № 1 а). $w(t) = 0.4 e^{-0.2 \cdot t}$

Задание № 1 б). $W(s) = Y(s) / X(s) = L\{2\exp(-2t)\} / L\{1(t)\} = 2s/(s+2)$

Задание № 1 с). $W(s) = L\{5t\} = 5/s^2$

Задание № 2 а). $W(s) = 6s / [15*s^4 - 9*s^3 + 12s + 3]$

Задание № 2 б). $W(s) = 0.5 / [0.4*s^2 - 0.2*s + 1]$

Задание № 3. $W(s) = \frac{2}{(s^2+3s+4)}$

$$h(t) = C_0 + C_1 e^{s_1 \cdot t} + C_2 e^{s_2 \cdot t}.$$

Задание № 4. $W(s) = Y(s)/X(s) = k / (Ts + 1)$