6. Анализ систем управления. Критерий устойчивости

6.1. Требования

Что мы хотим от управления? Это зависит, прежде всего, от решаемой задачи. В задаче *стабилизации* наиболее важны свойства *установившегося* режима. Для *следящих* систем в первую очередь нужно обеспечить высокое качество переходных процессов при изменении задающего сигнала (*уставки*).

В целом можно выделить четыре основных требования:

- **точность** – в установившемся режиме система должна поддерживать заданное значение выхода системы, причем ошибка (разница между заданным и фактическим значением) не должна превышать допустимую;
- **устойчивость** – система должна оставаться устойчивой на всех режимах, не должна идти «вразнос» (корабль не должен идти по кругу при смене курса);
- **качество переходных процессов** – при смене заданного значения система должна переходить в нужное состояние по возможности быстро и плавно;
- **робастность** – система должна сохранять устойчивость и приемлемое качество даже в том случае, если динамика объекта и свойства внешних возмущений немного отличаются от тех, что использовались при проектировании.

6.2. Критерий устойчивости Гурвица

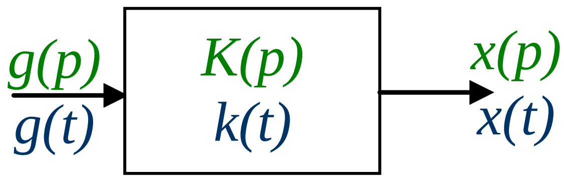
.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Понятие устойчивости

Для того, чтобы замкнутая САР была работоспособной, она должна быть устойчивой.

Пусть имеется система автоматического регулирования:



Определение.

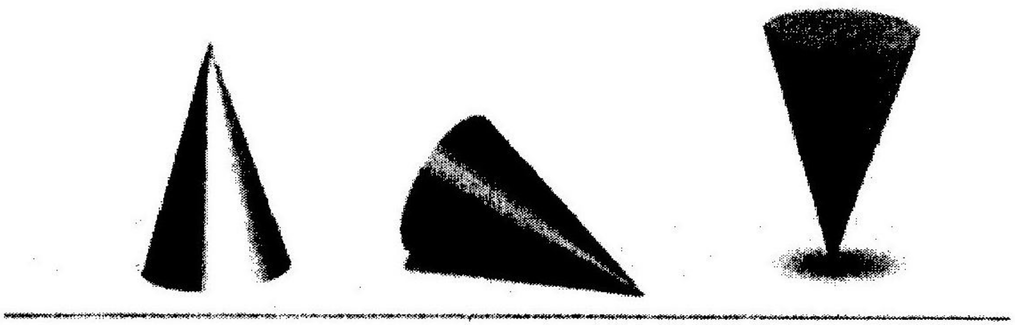
***Устойчивой* является САР, реакция которой на ограниченное воздействие является также ограниченной величиной.**

Математически это означает, что реакция САР на воздействие *g(t)* (при |*g(t)*| ≤ *M* для всех *t* ≥ 0, где *M* – конечное число) описывается выражением

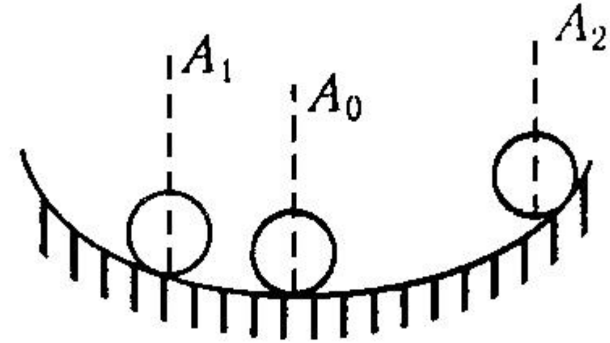
$$x(t)=\int_0^t k(\tau)g(t-\tau)d\tau \le M\int_0^t k(\tau)d\tau \le M\int_0^\infty k(\tau)d\tau \le M\int_0^\infty |k(\tau)|d\tau = Mc$$

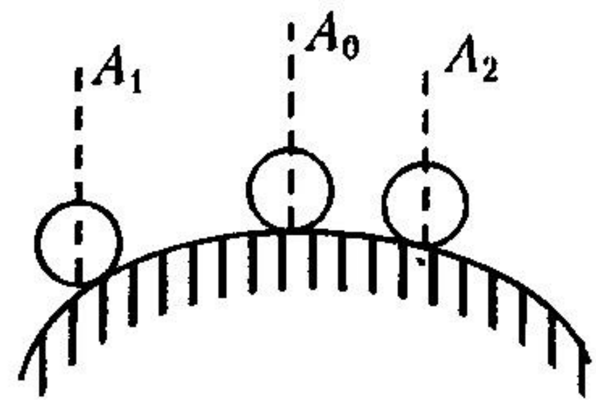
где $c=\int_0^\infty k(\tau)d\tau<\infty$ – конечное число

УСТОЙЧИВОСТЬ САР



а) Устойчивое *б*) Нейтральное *в*) Неустойчивое





УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

(Hurwitz, 1895)

Предварительные замечания

Все известные алгебраические критерии (Гурвица, Льенара-Шипара, Рауса) основаны на выявлении требуемых алгебраических соотношений между коэффициентами характеристического полинома, гарантирующих отсутствие его правых корней.

Пусть имеется характеристический полином замкнутой САР

$$G(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

где n – порядок САР.

Из коэффициентов х.п. может быть составлена матрица Гурвица (квадратная порядка n)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

На главной диагонали выписываются элементы a_1, a_2, …, a_n. Затем при движении от этих элементов вверх записываются коэффициенты в порядке возрастания индексов, при движении вниз – в порядке убывания. Недостающие элементы заполняются нулями.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Формулировка критерия

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все определители Гурвица были бы положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

и т.д., включая $\Delta_n > 0$

Примечания.

1. Определители Гурвица составляются по матрице Гурвица

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \dots & \Delta_n \end{array} \\ \Gamma = & \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Количество определителей равно порядку САР.

3. Последний определитель может быть вычислен более просто:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$$

4. Если $a_0 < 0$, то предварительно необходимо *G(p)* умножить на –1.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 1. ***n=1***

$$G(p) = a_0 p + a_1$$

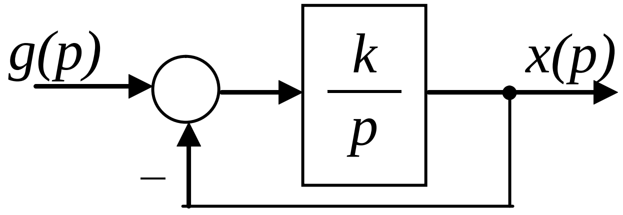
Определитель Гурвица $\Delta_n = \Delta_1 = a_1$

Условия устойчивости согласно критерия:

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_1 > 0}$$

(при этом полюс п.ф. $p_1 = -a_0 / a_1$ будет отрицательным.)

Пример 1. Определить условия устойчивости САР (n=1) по критерию Гурвица.



Решение.

ПФ замкнутой САР $K(p) = \dfrac{k/p}{1 + k/p} = \dfrac{k}{p+k}$

Характеристический полином: $G(p) = p + k$

Условие устойчивости $k > 0$

(Т.е. данная САР будет устойчива при любом положительном k, даже при $k \to \infty$)

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 2. ***n=2***

$$G(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 \; ; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$$

Условия устойчивости согласно критерия:

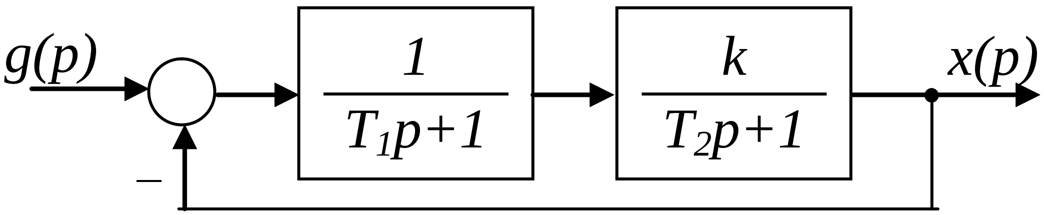
$$\boxed{a_0 > 0\,, \quad a_1 > 0\,, \quad a_1 a_2 > 0}$$

Таким образом, для САР 2-го порядка, как и для САР 1-го порядка, необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов *G(p)*.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 2. Определить условия устойчивости САР (n=2) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p)=\frac{\dfrac{1}{T_1p+1}\cdot\dfrac{k}{T_2p+1}}{1+\dfrac{1}{T_1p+1}\cdot\dfrac{k}{T_2p+1}}=\frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)+k}$$

Характеристический полином:

$$G(p)=T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1+k$$

Условия устойчивости

$$k>-1,\qquad T_1>0\ ,\qquad T_2>0$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Частный случай 3. ***n=3***

$$G(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

Определители Гурвица

$$\Delta_n = \Delta_1 = a_1 \ ; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 \ ; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2$$

Условия устойчивости согласно критерия могут быть получены после простых преобразований:

$$a_0 > 0 \ , \quad a_1 > 0 , \quad a_2 > 0 \ , \quad a_3 > 0 \ ,$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Таким образом, для устойчивости САР 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома *G(p)* были положительны, и произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних.

Следствие 1 из критерия Гурвица.

Для системы любого порядка положительность коэффициентов х.п. является необходимым, но не достаточным условием устойчивости.

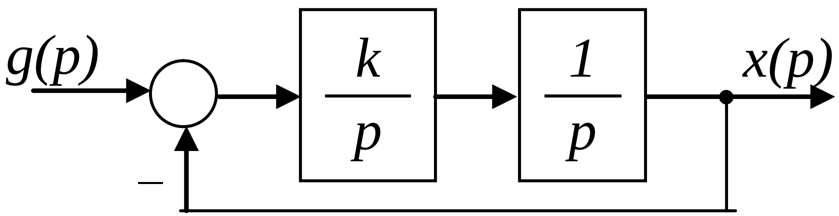
УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Следствие 2 из критерия Гурвица.

Пропуск хотя бы одного члена полинома (равенство соответствующего коэффициента нулю) говорит о том, что САР не устойчива (возможно, на границе устойчивости).

Пример 3. Определить условия устойчивости САР по критерию Гурвица.



Решение. П.ф. замкнутой САР

$$K(p)=\frac{\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{p}}{1+\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{p}}=\frac{k}{p^2+k}$$

Характеристический полином: $G(p)=p^2+k$

Определители Гурвица в этом случае равны нулю и критерий не выполняется.

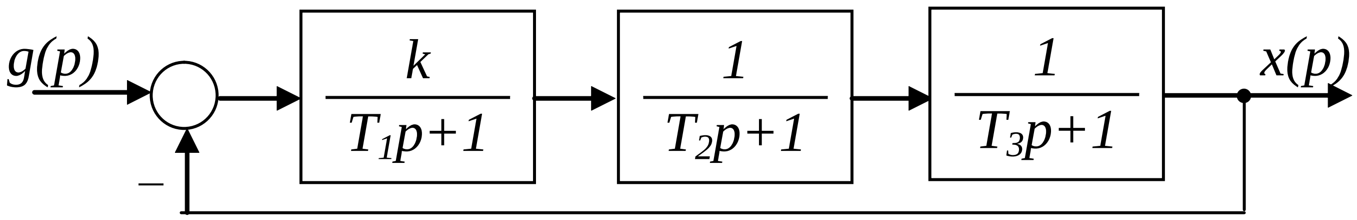
Такое звено является частным случаем колебательного звена при ξ=0 и называется *консервативным*, используется для формирования гармонических сигналов, поскольку ее переходной функцией есть незатухающие автоколебания (звено на границе устойчивости).

Рассмотренная САР (пример 3) называется *структурно неустойчивой*, поскольку невозможно добиться ее устойчивости только путем изменения ее параметров.

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 4. Определить условия устойчивости САР (n=3) по критерию Гурвица



Решение.

П.ф. замкнутой САР

$$K(p)=\frac{\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}{1+\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}=\frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+k}$$

Характеристический полином:

$$G(p)=T_1T_2T_3p^3+(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)p^2+(T_1+T_2+T_3)p+1+k$$

Условия устойчивости

$$k>-1,\quad T_1>0,\quad T_2>0,\quad T_3>0$$

$$(T_1+T_2+T_3)(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)>(1+k)T_1T_2T_3$$

УСТОЙЧИВОСТЬ САР

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пример 4. Условия устойчивости

$$k > -1, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0$$

$$(T_1 + T_2 + T_3)(T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3) > (1 + k)T_1T_2T_3$$

Частный случай: Если $T_1 = T_2 = T_3 = T > 0$, то из последнего условия устойчивости следует:

- что система будет устойчива при $k < 8$, независимо от величин постоянных времени;
- при $k = k_{гр} = 8$ САР будет находиться на границе устойчивости;
- при большем значении коэффициента ($k > 8$) САР будет неустойчива.

Для того, чтобы повысить коэффициент усиления разомкнутой системы, сохраняя устойчивость САР, следует постоянные времени раздвинуть в значениях. Иначе говоря, граничный коэффициент усиления $k_{гр}$ больше зависит от соотношения постоянных времени, нежели от их величины.

Например, если $T_1 =1$, $T_2 =1$, $T_3 = 0,1$. Из последнего условия устойчивости можно получить, что

$$k_{гр} = 45,2$$

Задачи

№1.

Исследовать устойчивость (по критерию Гурвица) системы управления, которая описывается следующим уравнением (y — выход, u — вход):

$$\frac{d^4y}{dt^4}+5\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=5\frac{du}{dt}+3u$$

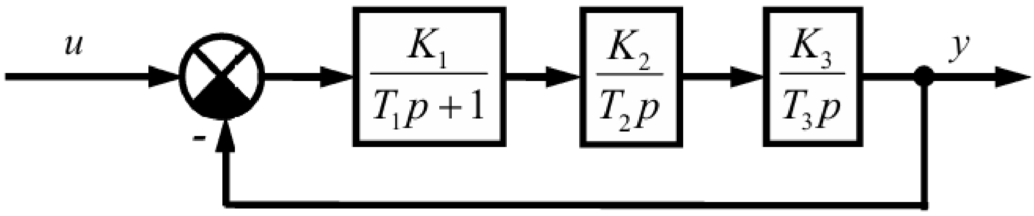
№2.

Исследовать устойчивость (по критерию Гурвица) замкнутой системы при следующих передаточных функциях разомкнутой системы:

$$W_p=\frac{7s^2+3s+1}{s^4+6s^3+4s^2+4s+2}$$

№3.

Исследовать на устойчивость систему управления, схема которой –



Решения

№1.

Передаточная функция, отвечающая уравнению системы управления -

W=$\frac{y}{u}=\frac{5p+3}{p^4+5p^3+5p^2+4p+3}$.

Матрица Гурвица - $\Gamma=\begin{matrix}5 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 3\end{matrix}$

Определители Гурвица -

$$\Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=21>0,\quad \Delta_3=25-16>0\qquad \Delta_4=\Delta_3*3>0$$

Система управления – устойчива.

№2.

Передаточная функция замкнутой системы –

$$W_з = \frac{7s^2 + 3s + 1}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 7s + 3}$$

Характеристический полином –

G(s) = $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 7s + 3$

Матрица Гурвица - $Г = \begin{matrix} 6 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 3 \end{matrix}$

Определители Гурвица -

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 59 > 0, \quad \Delta_3 = 7 * 59 - 108 > 0 \qquad \Delta_4 = \Delta_3 * 3 > 0$$

Система управления – устойчива.

№3.

Передаточная функция разомкнутой системы –

$$W_{раз}(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p + 1) \cdot T_2p \cdot T_3p}$$

Передаточная функция замкнутой системы –

$$W_{зам}(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p + 1) \cdot T_2p \cdot T_3p + K_1K_2K_3}$$

Характеристический полином –

G(s) = $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot p^3 + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2 + K_1K_2K_3 = 0$

Матрица Гурвица - $Г = \begin{matrix} T_2 \cdot T_3 & K_1K_2K_3 & 0 \\ T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 \cdot T_3 & K_1K_2K_3 \end{matrix}$

Диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = T_2 \cdot T_3;$$

$$\Delta_2 = -K_1K_2K_3 \cdot T_1T_2T_3;$$

$$\Delta_3 = K_1K_2K_3 \cdot \Delta_2 = -(K_1K_2K_3)^2 \cdot T_1T_2T_3;$$

При любых значениях постоянных времени Т и коэффициентов усиления К $\Delta_3 < 0$. Система является структурно неустойчивой.