4. Типовые (элементарные) звенья (усилительное, дифференцирующее, интегрирующее, апериодическое и т.д.)

Обычно система управления состоит из отдельных блоков, каждый из которых описывается уравнениями низкого порядка (чаще всего – первого или второго). Для понимания работы системы в целом желательно хорошо представлять, как ведут себя ее отдельные элементы. Динамические характеристики показывают изменение выходных параметров во времени – y(t). Динамические характеристики зависят от воздействия. Рабочее воздействие определяется программой управления (регулирования). Воздействие, связанное с эксплуатацией, называется возмущающим воздействием. Динамические характеристики могут быть временные и частотные. Для того чтобы получить реакцию системы, необходимо задать внешнее управляющее воздействие.

Понятие "типовые звенья" в теории управления техническими системами, в основном, связано с описанием САУ (САР) в переменных "вход – выход", т.е. описание систем в передаточных функциях. Достигнуто общепринятое соглашение, что наиболее удобно расчленять структурную схему САУ (САР) на звенья 1-го и 2-го порядков. Принято называть такие простейшие звенья типовыми.

Любую линейную САУ (САР) или линеаризованную САР можно структурно расчленить на простейшие элементы (звенья), соединенные между собой соответствующими последовательными, параллельными связями, местными и локальными обратными связями, сумматорами, сравнивающими устройствами и т.д.

4.1. Основные определения

Переходной [h(t)] называется функция, определяющая изменение выходной величины при скачкообразном изменении входной величины на единицу [1(t)] при нулевых начальных условиях.

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t => 0 \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases};$$

Если передаточная функция $W(s) = \frac{N(s)}{L(s)}$, причем уравнение $L(s) = 0$ не имеет кратных корней, то переходная функция $h(t) = \frac{N(0)}{L(0)} + \sum_1^n \frac{N(s_i)}{s_i L'(s_i)} e^{s_i t}$, где $L'(s_i) = \frac{dL(s)}{s} |_{s=s_i}$, s_i - корни характеристического уравнения $L \quad (s) = 0$.

Импульсной (импульсная переходная; функция веса) [w(t)] называется функция, определяющая изменение выходной величины при приложении на входе единичного импульса [дельта функции δ(t)] и при нулевых начальных условиях.

$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ при } t = 0 \\ 0 \text{ при } t >< 0 \end{cases}$; $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$; $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.

Весовая функция w(t) (так же как и переходная) может быть определена при известной передаточной функции звена $W(s) = \frac{N(s)}{L(s)}$ с помощью формулы Хевисайда:

$$w(t) = \sum_1^n \frac{N(s_i)}{L'(s_i)} e^{s_i t},$$

поскольку $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$; $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$; $h(t) = \int_0^{\infty} w(t)dt$.

Передаточная функция динамического звена есть изображение Лапласа его весовой функции $W(s) = L\{w(t)\}$

Частотной (амплитудно-фазовой) W(i·ω) называется функция, определяющая изменение амплитуды и фазы выходной величины в установившемся режиме при приложении на входе гармонического воздействия.

Передаточной [W(s)] функцией называют отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Взаимосвязь функций

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right];$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = L^{-1}[W(s)];$$

$$W(i\cdot\omega) = i\cdot\omega\cdot F[h(t)] = F[w(t)] = W(s)|_{s=i\cdot\omega};$$

$$W(s) = s\cdot L[h(t)] = L[w(t)] = W(i\cdot\omega)|_{i\cdot\omega=s},$$

где L и L^{-1} - символы прямого и обратного преобразования Лапласа:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt;$$

$$L^{-1}\{f(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\cdot\omega}^{\sigma+i\cdot\omega} f(s)\, e^{st}ds,$$

σ_0 – абсцисса абсолютной сходимости функции.

F и F^{-1} - символы прямого и обратного преобразования Фурье:

$$F\{f(t)\} = f(i\cdot\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt;$$

$$F^{-1}\{f(i\cdot\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(i\cdot\omega)\, e^{-i\cdot\omega\cdot t}d\omega,$$

Определение выходной величины y(t) может осуществляться по известным входной величине x(t) и:

- Переходной функции h(t):

$$y(t) = x(t)h(0) + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)(t)d\tau =$$

$$= x(t)h(0) + \int_{t_0}^{t} h(\tau)x'(t-\tau)d\tau$$

- Импульсной (весовую) функции w(t):

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)w(t)d\tau = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

- Передаточной функции W(s):

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[X(s)\cdot W(s)]$$

4.2. Типовые динамические звенья

Обычно система управления состоит из отдельных блоков, каждый из которых описывается уравнениями низкого порядка (чаще всего – первого или второго). Передаточную функцию разбивают на простейшие сомножители

$$W(s) = W_1(s) * W_2(s) * \ldots W_n(s)$$

Учитывая, что передаточная функция линейного (линеаризованного) звена может быть записана как:

$$W(s) = \frac{K \cdot N(s)}{L(s)}$$

где: *N(s)* и *L(s)* - полиномы по степеням s, причем коэффициенты при низшей степени s в полиномах *N(s)*, *L(s)* равны 1, классификацию на типы звеньев можно объяснить видом полиномов или (что эквивалентно) видом коэффициентов в соответствующих уравнениях динамики звена.

В первом приближении различают 3 типа звеньев:

1. Позиционные, например W(s) = $\frac{s^2+3\cdot s^1+1}{2\cdot s^3+5\cdot s^2+s^1+1}$. В уравнениях динамики (x(t) – входной сигнал, y(t) – выходной):

   $2\cdot y'''(t) + 5\cdot y'' + y'(t) + y(t) = x''(t) + 3\cdot x'(t) + x(t)$

   Из типовых звеньев (1-го и 2-го порядка) к позиционным звеньям относятся: идеальное усилительное звено, апериодические звенья 1-го и 2-го порядка, колебательное звено и форсирующее звено.

2. Дифференцирующие, например W(s) = $\frac{s^2+3\cdot s^1}{2\cdot s^3+5\cdot s^2+s^1+1}$. В уравнениях динамики:

   $2\cdot y'''(t) + 5\cdot y'' + y'(t) + y(t) = x''(t) + 3\cdot x'(t)$

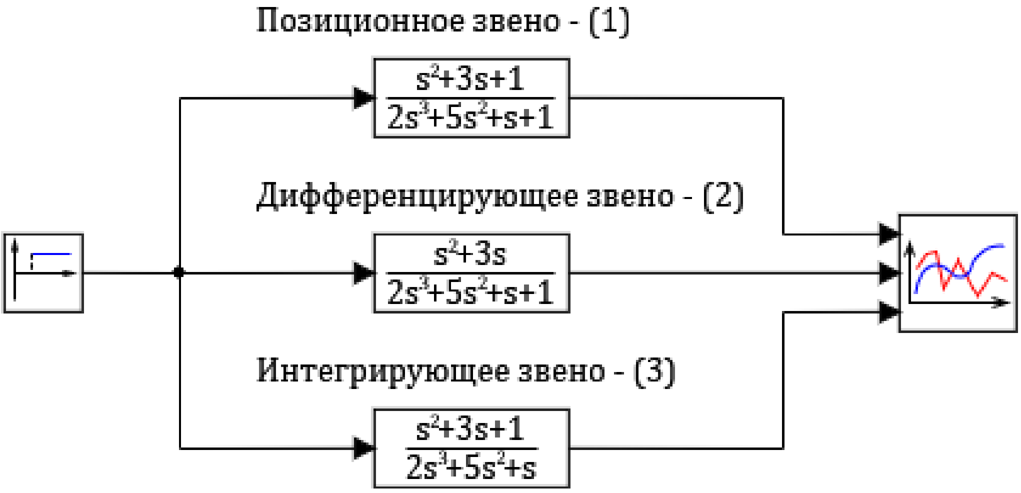
   Из типовых звеньев к дифференцирующим звеньям относятся идеальное дифференцирующее звено, инерционно-дифференцирующее звено.

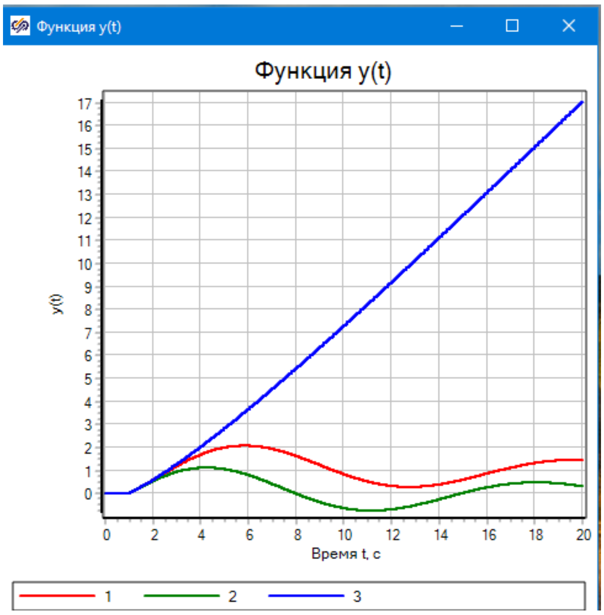
3. Интегрирующие, например W(s) = $\frac{s^2+3\cdot s^1+1}{2\cdot s^3+5\cdot s^2+s^1}$, или в уравнении динамики:

   $2\cdot y'''(t) + 5\cdot y'' + y'(t) = x''(t) + 3\cdot x'(t) + x(t)$

Из типовых звеньев к интегрирующим звеньям относятся идеальное интегрирующее звено, инерционно–интегрирующее звено.

Пример переходного процесса при единичном ступенчатом воздействии на три разных узла –





4.2.1. Усилитель

Уравнение динамики звена имеет вид:

$$y(t) = K \cdot x(t), \quad (4.1)$$

т.е. уравнение не является дифференциальным, следовательно, данное звено является безынерционным.

Переходя к изображениям x(t) -> X(s); y(t) -> Y(s), получаем:
Y(s) = K·X(s) – уравнение динамики звена в изображениях.

Передаточная функция идеального усилительного звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K.$$

АФЧХ не зависит от ω -

$$W(iw) = W(s)|_{s=i\omega} = K.$$

Звенья, имеющие $W(s) = K \neq 0$ называются позиционными. При действии на вход единичного ступенчатого сигнала l(t) на выходе будет такой же сигнал, усиленный в K раз.

Весовая функция:

$$w(t) = L^{-1}\cdot[W(s)] = L^{-1}\cdot[K] = K\cdot L^{-1}[1] = K\cdot\delta(t)$$

Переходная и импульсная характеристика звена –

$$h(t) = K \quad (t > 0) \;; \qquad w(t) = K*\delta(t) \;; \qquad W(s) = K.$$

Если на вход усилителя действует синусоидальный сигнал, на выходе он усиливается в K раз без изменения фазы, поэтому амплитудная и фазовая частотная характеристики не зависят от частоты входного сигнала: $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$.

$W(i\cdot\omega) = W(s) = K$

Годограф АФЧХ вырождается в точку:

- вещественная частотная характеристика $U(\omega) = Re(\omega) = K$;
- мнимая частотная характеристика $V(\omega) = Im(\omega) = 0$.

$A(\omega) = \mathrm{mod}\, W(i\cdot\omega) = |\, W(i\cdot\omega)\,| = K$

Характеристики звена Усилитель $y(t) = K\cdot x(t)$**:**

Передаточная функция $W(s) = K.$

Весовая функция: $w(t) = K\cdot\delta(t)$

Переходная и импульсная характеристика звена :

$$h(t) = K \;; \qquad w(t) = K*\delta(t) \;; \quad W(s) = K.$$

Амплитудная и фазовая частотная характеристики: $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$.

Примерами звена являются:

- Механический редуктор (Представление редуктора пропорциональным звеном всегда является идеализированным, т.к. не учитывается упругие деформации валов и шестерен (они предполагаются абсолютно жесткими), а также зазоры в зубчатых передачах);
- Безынерционный (широкополосный) электронный усилитель (Представление усилителя пропорциональным звеном всегда является идеализированным. Реальный усилитель не может пропускать сигналы всех частот одинаково, с увеличением частоты входного напряжения коэффициент усиления реального усилителя будет уменьшаться, однако в широкой полосе частот это уменьшение незначительно и его можно не учитывать);
- делитель напряжения и т.д.

В SimInTech звено $W(s) = K$ реализуется с помощью элемента «Усилитель» библиотеки «Операторы» раздела SimInTech. Коэффициент усиления задаётся свойством усилителя.

4.2.2. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующее звено дает на выходе производную входного сигнала. Уравнение идеального дифференцирующего звена

$$y(t) = k*dx(t)/dt, \qquad (4.2.1)$$

его операторная запись $y(t) = k \cdot p\ x(t)$, а передаточная функция $W(s) = k \cdot s$.

Известно, что производная единичного ступенчатого сигнала 1(t) в точке $t = 0$ – это дельта-функция $\delta(t)$. Поэтому переходная и весовая функции дифференцирующего звена

$$h(t) = k*\delta(t), \qquad w(t) = k*d\delta/dt.$$

Это физически нереализуемые функции, так как дельта-функцию и ее производную, имеющие бесконечные значения, невозможно получить на реальном устройстве. Поэтому идеальное дифференцирующее относится к физически нереализуемым звеньям.

В технике не могут использоваться физически нереализуемые звенья. Поэтому важно рассмотреть аналогичное звено, которое выполняет дифференцирования низкочастотных сигналов и одновременно имеет ограниченное усиление на высоких частотах. Инерционное дифференцирующее звено описывается уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k * \frac{dx(t)}{dt}$$

и имеет передаточную функцию $W(s) = k*s / (Ts+1)$. Фактически это последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев.

Апериодическое звено добавляет инерционность: обладая свойствами фильтра низких частот, оно ограничивает усиление на высоких частотах. Поскольку передаточная функция имеет равные степени числителя и знаменателя, на высоких частотах (выше сопрягающей частоты $\omega = 1/T$) ЛАЧХ имеет нулевой наклон, поэтому неограниченного роста коэффициента усиления не происходит.

4.2.2.1. Идеальное дифференцирующее звено

Уравнение динамики звена имеет вид:

$$y(x) = K \cdot \tau \cdot x'(t), \qquad (4.2.2)$$

где: τ – постоянная времени.

Переходя к изображениям $x(t) \to X(s)$; $x'(t) \to s \cdot X(s)$; $y(t) \to Y(s)$, получаем уравнение динамики звена в изображениях:

$$Y(s) = K \cdot \tau \cdot s \cdot X(s)$$

Передаточная функция идеального дифференцирующего звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \cdot \tau \cdot s = i \cdot K \cdot \tau \cdot \omega$$

АФЧХ – Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(i \cdot \omega) = i \cdot K \cdot \tau \cdot \omega;$$

$$Re \quad (\omega) = \mathrm{U}(\omega) = 0;$$

$$Im \quad (\omega) = \mathrm{V}(\omega) = K \cdot \tau \cdot \omega;$$

$$\mathrm{A}(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} = K \cdot \tau \cdot \omega;$$

$$\varphi(\omega) = arctg \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = \frac{\pi}{2}$$

Логарифмическая амплитудная характеристика ЛАХ:

$$\mathrm{Lm}(\omega) = 20 \cdot \lg(\mathrm{A}(\omega)) = 20 \cdot \lg(K \cdot \tau) + 20 \cdot \lg(\omega)$$

Весовая функция звена:

$$\mathrm{w(t)} = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{W(s)}] = \mathrm{L}^{-1}[K \cdot \tau \cdot s \cdot \omega]$$

$$\mathrm{w(t)} = K \cdot \tau \cdot \delta'(t)$$

Переходная функция звена:

$$\mathrm{h(t)} = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{H(s)}] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{K \cdot \tau \cdot s}{s} \cdot [1]\right]$$

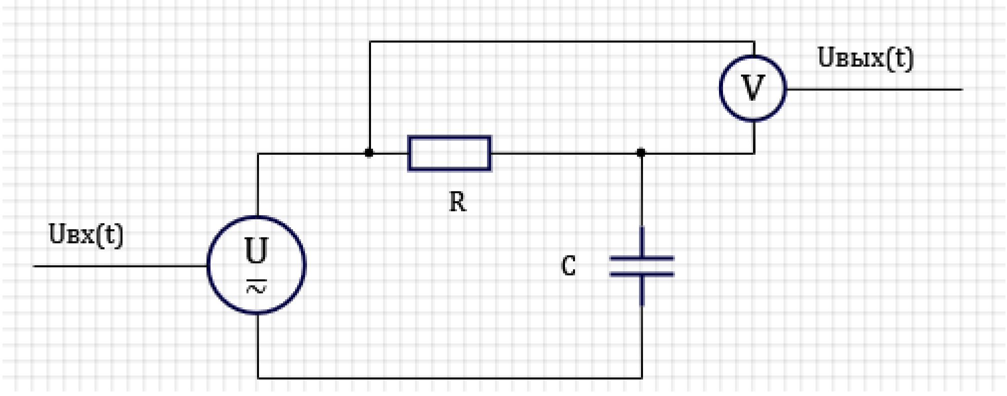
$$\mathrm{h(t)} = K \cdot \tau \cdot \delta \quad (t)$$

Звено обеспечивает опережение по фазе на π/2 (при любой частоте входного сигнала). Чем выше частота единичного гармонического сигнала на входе в звено, тем выше амплитуда выходного сигнала в установившемся режиме.

Характеристики дифференцирующего звена $y(x) = K \cdot \tau \cdot x'(t)$**:**
Передаточная функция $W(s) = K \cdot \tau \cdot s$.
Весовая функция: $w(t) = K \cdot \tau \cdot \delta'(t)$
Переходная функция звена: $h(t) = K \cdot \tau \cdot \delta \quad (t)$
Амплитудная и фазовая частотная характеристики:
$A(\omega) = K \cdot \tau \cdot \omega$; $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

4.2.2.2. Инерционно-дифференцирующее звено

Для электрической схемы -



$U_{вх} = U_R + U_C$, $I = dq_c/dt$, $q_c = C*U_c$
$U_{вх} = U_R + U_C = I*R + U_{вх} - U_R = dq_c/dt * R + U_{вх} - U_R \Rightarrow$
$0 = dq_c/dt * R - U_R$
$C*R*dU_c /dt - U_R = C*R*d(U_{вх} - U_R) /dt - U_R$

$C*R*dU_{вх} /dt - C*R*dU_R /dt - U_R \Rightarrow$
$C*R*dU_R /dt + U_R = C*R*dU_{вх} /dt$ или

$C*R*y'(t) + y(t) = C*R*x(t)$ $\{ C*R \to \tau \}$

Уравнение динамики инерционно-дифференцирующего звена имеет вид:

$T*y'(t) + y(t) = \tau*x'(t)$ или обычно записывают $T*y'(t) + y(t) = k*x'(t)$

В изображениях Лапласа

$$(T\cdot s + 1) \cdot Y(s) = \tau \cdot s \cdot X(s).$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau \cdot s}{T \cdot s + 1}$$

АФЧХ (s -> $i \cdot \omega$) $W(i \cdot \omega) = \frac{\tau \cdot i \cdot \omega}{T \cdot i \cdot \omega + 1} = \frac{\tau \cdot T \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2} + i \cdot \frac{\tau \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$;

$U(\omega) = \frac{\tau \cdot T \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$ $V(\omega) = \frac{\tau \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}$

Модуль АФЧХ $A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{\tau \cdot \omega}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega}}$

Сдвиг фазы $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \mathrm{arctg}\frac{1}{T \cdot \omega} = \mathrm{arcctg}(T \cdot \omega)$

Логарифмическая амплитудная характеристика ЛАХ определяется по формуле

$$Lm(\omega) = 20 \cdot \lg(\tau \cdot \omega) - 20 \cdot lg\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}$$

4.2.3. Идеальное интегрирующее звено

Интегрирующее звено описывается уравнением

$$T\cdot\frac{dy(t)}{dt} = K * x(t), \qquad (4.3)$$

в изображениях $T \cdot s \cdot Y(s) = K \cdot X(s)$
которому соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s}.$$

АФЧХ: $W(i \cdot \omega) = \frac{K}{i \cdot T \cdot \omega} = -i \cdot \frac{K}{T \cdot \omega};$

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -\frac{K}{T \cdot \omega};$$

Фазочастотная характеристика идеального интегрирующего звена:

$$\varphi(\omega) = const = -\pi/2$$

Весовая функция звена:

$$w(t) = L^{-1}[W(s) \cdot [1]] = L^{-1}\left[\frac{K}{T \cdot s} \cdot [1]\right] \rightarrow$$

$$w(t) = \frac{K}{T} \cdot 1(t)$$

Переходная функция звена:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s} \cdot [1]\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{T \cdot s^2} \cdot [1]\right] \rightarrow$$

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot t$$

Отметим, что переходную функцию можно определить через решение уравнения (4.3) -

$$y(t) = y(0) + \frac{K}{T}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Используя это решение для единичного скачка ($x(t) = 1$ при $t \geq 0$) при нулевых начальных условиях ($y(0) = 0$), получаем линейно возрастающую переходную характеристику:

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot t.$$

Характеристики интегрирующего звена $T \cdot \frac{dy(t)}{dt} = K * x(t).$

Передаточная функция $W(s) = \frac{K}{Ts}.$

Весовая функция: $w(t) = \frac{K}{T} \cdot 1(t)$

Переходная функция звена $h(t) = k \cdot t \cdot 1(t)$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$W(i \cdot \omega) = -i \cdot \frac{K}{T \cdot \omega};$$

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = -\frac{K}{T \cdot \omega};$$

Фазочастотная характеристика идеального интегрирующего звена:

$$\varphi(\omega) = const = -\pi/2$$

Примеры интегрирующего звена:

- ванна, в которую набирается вода. Входной сигнал – это поток воды через кран, выход системы – уровень воды в ванне. При поступлении воды уровень растет, система «накапливает» (интегрирует) входной сигнал.

- Гидравлический демпфер (F – сила, действующая на поршень (входная величина); y – перемещение поршня (выходная величина). (https://studfile.net/preview/3580473/)

Пример интегрирующего и дифференцирующего звена на основе конденсатора

Один и тот же технический элемент, с точки зрения теории автоматического управления, может выступать как в качестве интегрирующего, так и в качестве дифференцирующего звена.

В качестве примера интегрирующего звена можно рассмотреть конденсатор, где входным воздействием является ток, а выходным результатом является напряжение на клеммах конденсатора. Действительно, при малом токе и большой емкости конденсатора, в случае ступенчатого изменения тока с 0, мы получаем график напряжения, совпадающий по форме с переходной функцией интегрирующего звена.

Тот же самый конденсатор, при определенных параметрах сети, может выступать в качестве идеального дифференцирующего звена, если в качестве входного воздействия подавать напряжение, а в качестве результирующей величины использовать ток в цепи.

4.2.3. Апериодическое звено

Одно из самых часто встречающихся звеньев – апериодическое, которое описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k * x(t) \tag{4.4}$$

и имеет передаточную функцию

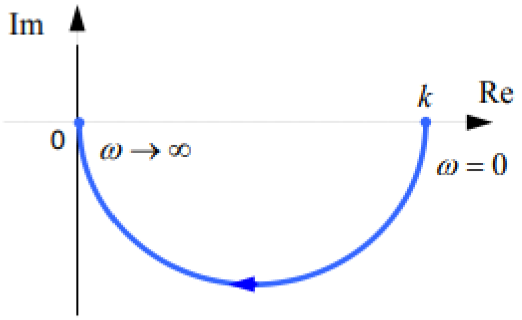
$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{k}{i\cdot\omega\cdot T+1}.$$

Здесь k – безразмерный коэффициент, а T > 0 – постоянная, которая называется постоянной времени звена. Постоянная времени – размерная величина, она измеряется в секундах и характеризует инерционность объекта, то есть скорость его реакции на изменение входного сигнала.

Частотная характеристика определяется выражением

$$W(i\cdot\omega) = \frac{k}{i\cdot\omega\cdot T+1} = \frac{k\cdot(1-i\cdot\omega\cdot T)}{T^2\cdot\omega^2+1} = \frac{k}{T^2\cdot\omega^2+1} - \frac{i\cdot k\cdot T\cdot\omega}{T^2\cdot\omega^2+1}.$$

Для каждой частоты ω значение W(i·ω) – это точка на комплексной плоскости. При изменении ω от 0 до ∞ получается кривая, которая называется **годографом Найквиста (диаграммой Найквиста)**.



В данном случае можно показать, что частотная характеристика – это полуокружность с центром в точке (0,5k; 0) радиуса 0,5k. Годограф начинается (на нулевой частоте) в точке (k; 0) и заканчивается в начале координат (при $\omega \to \infty$).

Переходная функция для звена (4.4) –

$$h(t) = y(t) = k\left[1 - exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]$$

Импульсная характеристика -

$$w(t) = \frac{k}{T} exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

Если звено описывается уравнением (изменение знака перед y(t))

$$T\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = k * x(t) \qquad (4.4a)$$

то переходная и импульсная характеристики

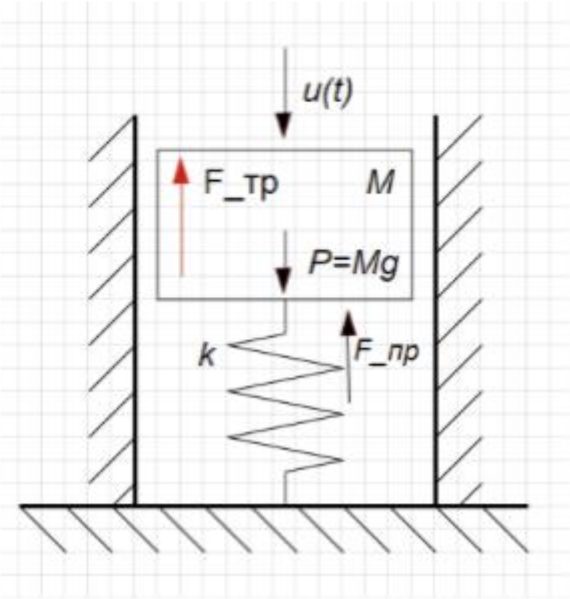
$$h(t) = k\left[exp\left(-\frac{t}{T}\right) - 1\right] \qquad w(t) = \frac{k}{T} exp\left(\frac{t}{T}\right)$$

показывают, что звено становится неустойчивым. Действительно, обычно предполагается, что постоянная времени T > 0, тогда экспоненты в этих выражениях бесконечно возрастают с ростом t. Поэтому звено названо «неустойчивым»: в покое оно находится в неустойчивом равновесии, а при малейшем возмущении «идет вразнос».

В качестве примера звена: двигатель любого типа (электрический, гидравлический, пневматический), генератор постоянного тока, нагревательная печь и т.д.

4.2.4. Апериодическое звено второго порядка

Рассмотрим апериодическое звено на примере модели механического демпфера. Механического демпфер - это поршень на пружине, он движется внутри цилиндра, может перемещается вверх-вниз. Его положение – это интересующая нас функция Y(t), сверху на него воздействует возмущающая сила (U(t)), на стенках поршня действует сила вязкого трения.



Согласно 2-му закону Ньютона ускорение тела пропорционально сумме сил, действующих на тело:

$$m \cdot \frac{d^2Y(t)}{dt^2} = \sum F_j = P + U(t) + F_{\text{пр}} + F_{\text{тр}}$$

где: m - масса поршня; Y(t) - положение поршня (выходная переменная); U(t) = X(t) - приложенная сила (входное воздействие); P - сила тяжести; $F_{\text{пр}} = k \cdot Y(t)$ – сила сопротивления пружины; $F_{\text{тр}} = c \cdot \frac{dY}{dt}$ – сила вязкого трения (пропорциональная скорости движения поршня).

Считаем, что в нулевой момент времени поршень находится в равновесии. Тогда начальное положение поршня - y_0 в равновесии, где скорость и ускорения равны 0, можно посчитать из уравнения 2-го закона Ньютона.

Перепишем уравнение равновесия в отклонениях от нулевого состояния (Y(t) = y_0 + y(t); U(t) = u_0 + u(t)). Поскольку мы приняли, что в начальный момент у нас состояние равновесия, а сумма трех сил в состоянии равновесия равна нулю, их можно убрать из уравнения, и в итоге получим уравнение динамики апериодического звена 2–го порядка:

$T_2^2 \cdot y''(t) + T_1 \cdot y'(t)$+ y(t) = $K \cdot x(t)$, (4.5)

где $T_2^2 = \frac{m}{k}$; $T_1 = \frac{c}{k}$; K = $\frac{1}{k}$.
при этом: $D = T_1^2 - 4 \cdot T_2^2 \geq 0$.

Отметим, если D<0, то звено становится колебательным.

Переходя к изображениям x(t) -> X(s); y(t) -> Y(s) получаем уравнение динамики звена в изображениях:

$(T_2^2 \cdot s^2(t) + T_1 \cdot s$ + 1) ·Y(t) = $K \cdot X(s)$.

Передаточная функция звена может быть представлена в двух видах:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T_2^2 \cdot s^2(t) + T_1 \cdot s + 1} <-> \frac{K}{(T_3 \cdot s + 1)(T_4 \cdot s + 1)}$$

где:

$$T_3 = \frac{T_1 - \sqrt{D}}{2}; \quad T_4 = \frac{T_1 + \sqrt{D}}{2}; \quad D = T_1^2 - 4 \cdot T_2^2 >= 0$$

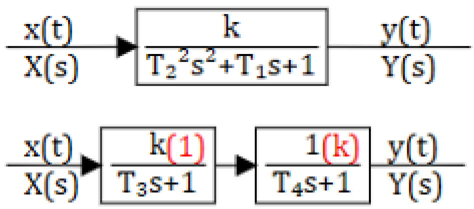


Рис.4_2.1. Апериодическое звено 2-го порядка (два варианта)

<u>Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ):</u>

$$W(i \cdot \omega) = W(s)|_{s=i\cdot\omega} = \frac{K}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2) + i \cdot T_1 \cdot \omega} <-> \frac{K}{(1 + i \cdot T_3 \cdot \omega)(1 + i \cdot T_4 \cdot \omega)}$$

Домножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженные скобки$(1 - i \cdot T_3 \cdot \omega)$ и $(1 - i \cdot T_4 \cdot \omega)$, после преобразования получаем:

$$W(i \cdot \omega) = \frac{K \cdot (1 - T_4 \cdot T_3 \cdot \omega^2)}{(1 + T_3^2 \cdot \omega^2)(1 + T_4^2 \cdot \omega^2)} - i \cdot \frac{K(T_4 + T_3) \cdot \omega}{(1 + T_3^2 \cdot \omega^2)(1 + T_4^2 \cdot \omega^2)}$$

Действительная и мнимая части АФЧХ:

$$u(\omega) = \frac{K \cdot (1 - T_4 \cdot T_3 \cdot \omega^2)}{(1 + T_3^2 \cdot \omega^2)(1 + T_4^2 \cdot \omega^2)}$$

$$v(\omega) = -\frac{K(T_4 + T_3) \cdot \omega}{(1 + T_3^2 \cdot \omega^2)(1 + T_4^2 \cdot \omega^2)}$$

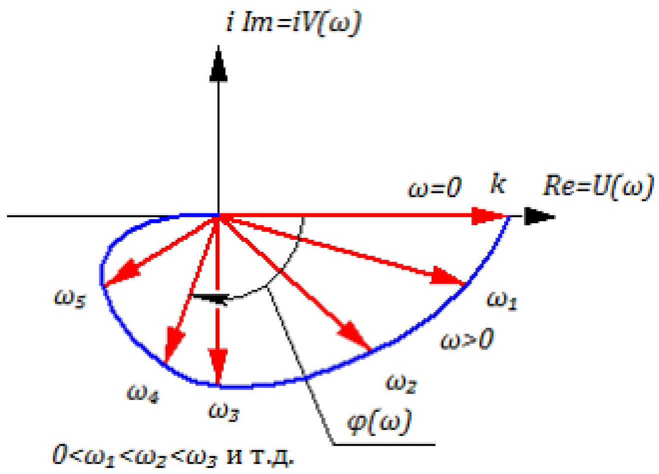
Анализируя поведение $u(\omega)$ и $v(\omega)$ при ω -> 0 и при ω -> ∞ получаем:

$$\lim_{\omega\to 0} u(\omega) = K; \qquad \lim_{\omega\to\infty} u(\omega) = 0;$$
$$\lim_{\omega\to 0} v(\omega) = 0; \qquad \lim_{\omega\to\infty} v(\omega) = 0;$$

Модуль АФЧХ (амплитуда), то есть mod(W(i·ω)) = |W(i·ω)| -

$$A(\omega) = |W(i\cdot\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T_3^2\cdot\omega^2}\cdot\sqrt{1+T_4^2\cdot\omega^2}}$$

Подставляя в формулы $u(\omega), v(\omega)$ различные значения ω можно построить векторы, соответствующие различным значениям ω (годограф АФЧХ апериодического звена 2-го порядка):



Формула фазового сдвига:

$$\varphi(\omega) = -\pi\cdot j + arctg\frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

Переходная функция звена h(t) (реакция звена на воздействие единичного сигнала **1(t))**

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{s\cdot(1+T_3\cdot s)(1+T_4\cdot s)}\right]$$

Для нахождения функции по формуле Хэвисайда, запишем корни полюса изображения, т.е. значения «s» при которых

$D_0(s) = s\cdot(1+T_3\cdot s)(1+T_4\cdot s) = 0.$

Имеем $s_1 = 0;\ s_2 = -\frac{1}{T_3};\ s_3 = -\frac{1}{T_4}.$

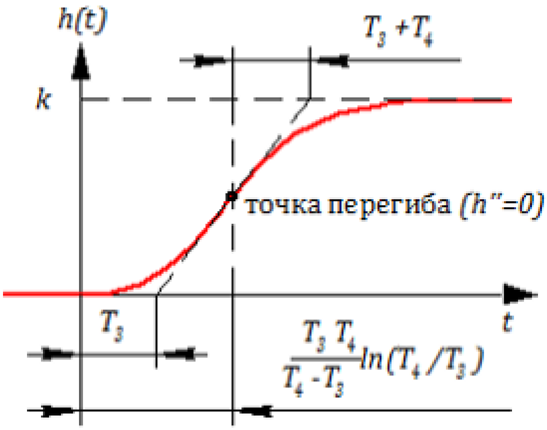
Тогда по формуле Хэвисайда:

$$f(t) = \lim_{s\to 0}[(s-0) \cdot \frac{K}{s\cdot(1+T_3 \cdot s)(1+T_4 \cdot s)} \cdot e^{st}]$$

$$+ \lim_{s\to -\frac{1}{T_3}}[\left(s+\frac{1}{T_3}\right) \cdot \frac{K}{s\cdot(1+T_3 \cdot s)(1+T_4 \cdot s)} \cdot e^{st}]$$

$$+ \lim_{s\to -\frac{1}{T_4}}[\left(s+\frac{1}{T_4}\right) \cdot \frac{K}{s\cdot(1+T_3 \cdot s)(1+T_4 \cdot s)} \cdot e^{st}] \to$$

$$f(t) = K[1+\frac{T_3}{T_4-T_3}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{T_4}{T_4-T_3}\cdot e^{-\frac{t}{T_4}}]$$



Весовая функция получается дифференцированием w(t) = h'(t) :

$$w(t) = \frac{K}{T_4-T_3}\cdot[e^{-\frac{t}{T_4}} - e^{-\frac{t}{T_3}}]$$

Для справки - Формула Хэвисайда

Если $F(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)}$, где $D_1(s)$ и $D_0(s)$– полиномы по степеням «s», то:

$$f(t) = \sum_{j=1} \frac{1}{(k_j-1)!}\cdot \lim_{s\to s_j}\frac{d^{k_{j-1}}}{ds^{k_{j-1}}}\cdot[\left(s-s_j\right)^{k_j}\cdot F(s)\cdot e^{st}]$$

где s_j – полюса изображения, т.е. те значения «s» при которых полином D_0(s) обращается в ноль; k_j – кратность j – го полюса.

4.2.5. Колебательное звено

Рассмотрим колебательное звено на примере электрического колебательного контура. Электрическая цепь содержит источник напряжения и последовательно соединённые индуктивность, сопротивление, конденсатор.

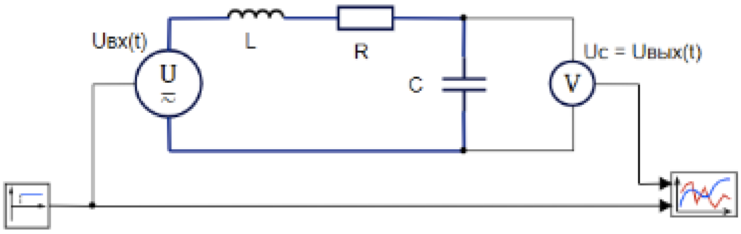


Рисунок 4.2.5.1. Электрический колебательный контур

Входное ступенчатое воздействие x(t), формирующее внешнюю Э.Д.С в цепи, подключено к блоку «источнику напряжения» x(t) = $U_{вх}$ (t).

Результирующий отклик звена - напряжение на конденсаторе y(t) = U_c(t) = $U_{вых}$(t).

Согласно второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, сумма Э.Д.С равна сумме напряжения на резистивных элементах контура.

$U_R + U_C = U_{вх} + \xi_L \rightarrow \quad U_{вх} = -\xi_L + U_R + U_C.$

где $\xi_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ - ЭДС индукции на катушке (направлено против изменения тока); $U_R = R \cdot I$ - падение напряжения на сопротивлении.

Сила тока в цепи равна изменению заряда конденсатора:

$I = \frac{dq}{dt}, \; q = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$

Тогда сила тока в цепи I связана с напряжение на конденсаторе U_C соотношением:

$L \cdot C \cdot \frac{d^2U_c}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_{вх}$

Имеем уравнение колебательного звена (y(t) = U_c; $x(t) = U_{вх}$)

$$T_2^2 \cdot y''(t) + T_1 \cdot y'(t) + y(t) = K \cdot x(t), \qquad (4.5)$$

В данном случае: $T_2^2 = L \cdot C; \quad T_1 = R \cdot C; \quad K = 1.$

Уравнение динамики звена описывается уравнением, аналогичным рассмотренному апериодическому звену второго порядка.

Причем $T_1 < T_2$, D= $T_1^2 - 4 \cdot T_2^2 \le 0$.

Учитывая, что D<=0, удобнее представить уравнение динамики в другой форме. Введем новые параметры: T = T_2 и β = $T_1/(2*T_2)$, где β - параметр (коэффициент) затухания (демпфирования). Тогда уравнение колебательного звена имеет вид

$$T^2 \cdot y''(t) + 2 \cdot \beta \cdot T \cdot y'(t) + y(t) = K \cdot x(t), \qquad (4.5)$$

Перейдем к изображениям: x(t) -> X(s) и y(t) -> Y(s) приходим к **передаточной функции** колебательного звена

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T^2 \cdot s^2(t) + 2 \cdot \beta \cdot T \cdot s + 1}$$

Еще раз подчеркнем, что параметр (коэффициент) затухания 0<=(демпфирования), 0 <= β <= 1, причем при β > 1 свойства колебательного звена совпадают с аналогичными свойствами соответствующего апериодического звена 2-го порядка, а при β = 0 звено выражается в консервативное, в котором могут существовать незатухающие гармонические колебания.

Выражение для АФЧХ получается после подстановки в выражение для передаточной функции s = i·ω

$$W(i\cdot\omega) = \frac{K}{T^2\cdot s(i\cdot\omega)^2 + 2\cdot\beta\cdot T\cdot(i\cdot\omega) + 1} =$$

$$= \frac{K}{(1-T^2\cdot\omega^2) + 2\cdot\beta\cdot T\cdot(i\cdot\omega)}$$

Домножим числитель и знаменатель на $(1-T^2\cdot\omega^2) - 2\cdot\beta\cdot T\cdot(i\cdot\omega)$.

Выражения для вещественной и мнимой частей принимают вид:

$$u(\omega) = \frac{K\cdot(1-T^2\cdot\omega^2)}{(1-T^2\cdot\omega^2)^2 + 4\cdot\beta^2\cdot T^2\cdot\omega^2}$$

$$v(\omega) = \frac{-2\cdot K\cdot\beta\cdot T\cdot\omega}{(1-T^2\cdot\omega^2)^2 + 4\cdot\beta^2\cdot T^2\cdot\omega^2}$$

Амплитуда АФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{u(\omega)^2 + v(\omega)^2} = \sqrt{\frac{K^2\cdot((1-T^2\cdot\omega^2)^2 + 4\cdot(\beta\cdot T\cdot\omega)^2}{((1-T^2\cdot\omega^2)^2 + 4\cdot\beta^2\cdot T^2\cdot\omega^2)^2}};$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\cdot\omega^2)^2 + 4\cdot\beta^2\cdot T^2\cdot\omega^2}}$$

Сдвиг фазы:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -arctg\dfrac{2\cdot\beta\cdot T\cdot\omega}{1-T^2\cdot\omega^2}, \text{ при } \omega \le \dfrac{1}{T} \\ -\pi - arctg\dfrac{2\cdot\beta\cdot T\cdot\omega}{1-T^2\cdot\omega^2}, \text{ при } \omega > \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Предельные значения:

$$\omega \to 0 => \begin{cases} u(\omega) \to K; \\ v(\omega) \to 0; \\ A(\omega) \to K; \\ \varphi(\omega) \to 0; \end{cases} \qquad \omega \to \infty => \begin{cases} u(\omega) \to 0; \\ v(\omega) \to 0; \\ A(\omega) \to 0; \\ \varphi(\omega) \to -\pi; \end{cases}$$

Одной из главных особенностей АФЧХ является возможность существования экстремума в зависимости A(ω). Выполним исследование на экстремум:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{K}{\sqrt{(1-T^2\cdot\omega^2)^2+4\cdot\beta^2\cdot T^2\cdot\omega^2}}\right] = 0$$

Отсюда выражение для экстремума:

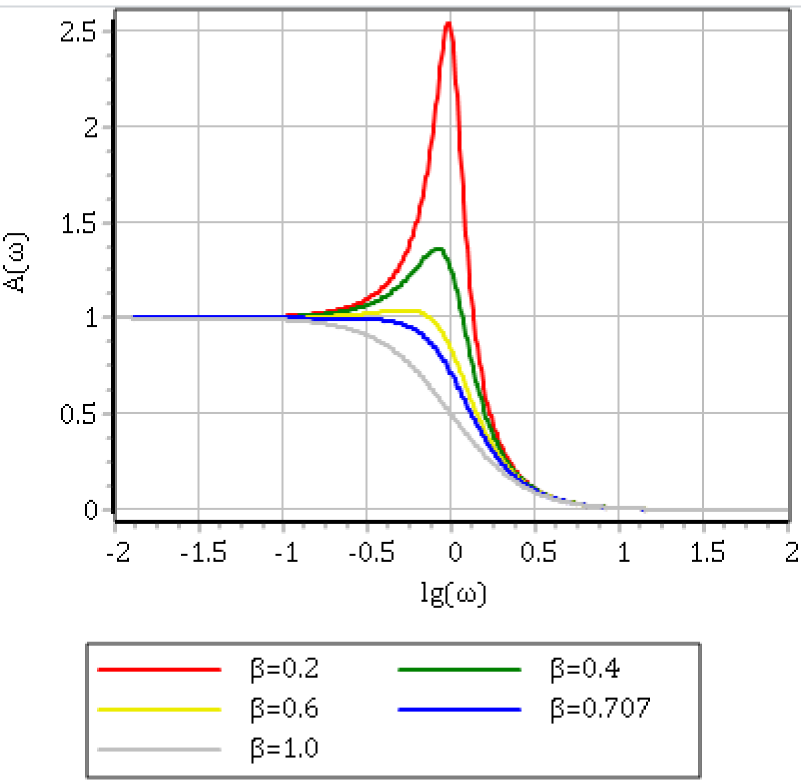
$$\omega_m = \frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-2\cdot\beta^2}$$

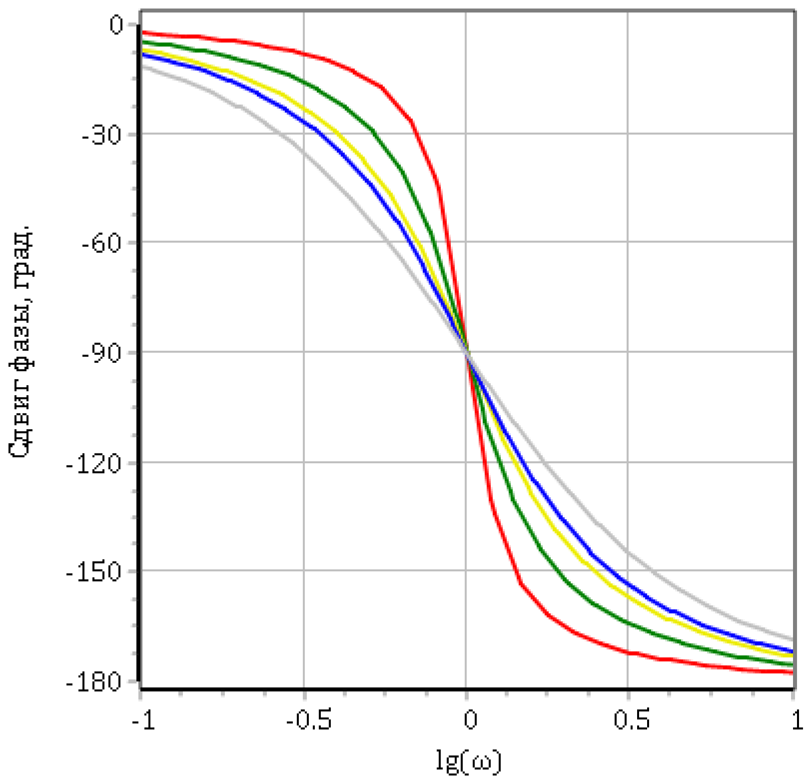
Если $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ зависимость A(ω) имеет экстремум

$$A(\omega_m) = \frac{K}{2\cdot\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}}$$

Анализ вышеприведенных соотношений показывает, что при $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ график $A(\omega)$ имеет горб, который при уменьшении β растет.

Частоту $\omega_м$ будем отождествлять с тем значением частоты входного гармонического воздействия, при которой имеет место максимальное значение амплитуды выходного сигнала. Поскольку $\beta = \frac{T_1}{T_2}$, то очевидна роль постоянных времени : T_2– ‘раскачивает’ колебания, а $-T_1$ ‘демпфирует’ их.

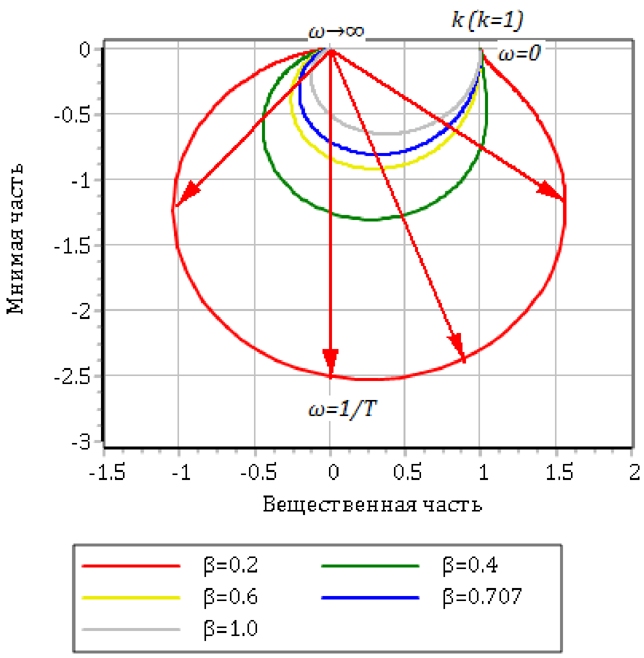


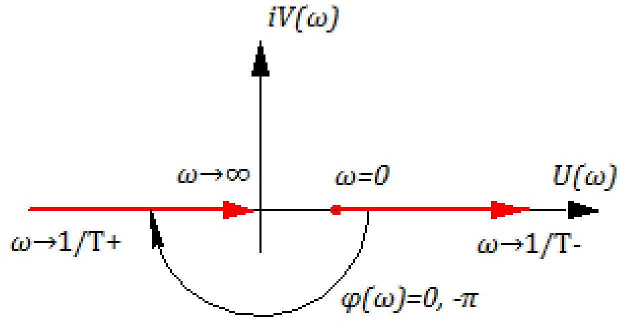


Частота $\omega = \frac{1}{T}$ называется частотой свободных колебаний и обозначается ω_0. Колебательное звено, в котором $\beta = 0$ вырождается в консервативное. В данном звене при ступенчатом воздействии устанавливаются незатухающие колебания. Выражение экстремума для такого звена:

$$\omega_m = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \beta^2} = \frac{1}{T}$$

Годограф АФЧХ на комплексной плоскости:





Переходная функция звена h(t)

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{s\cdot(T^2\cdot s^2+2\cdot\beta\cdot T\cdot s+1)}\right] =>$$

$$h(t) = \frac{K}{T^2}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s\cdot(s^2+\frac{2\cdot\beta}{T}\cdot s+\frac{1}{T^2})}\right]$$

Для вычисления переходной функции воспользуемся формулой Хэвисайда.

Для справки - Формула Хэвисайда

Если $F(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)}$, где $D_1(s)$ и $D_0(s)$– полиномы по степеням «s», то:

$$f(t) = \sum_{j=1} \frac{1}{(k_j-1)!}\cdot \lim_{s\to s_j}\frac{d^{k_{j-1}}}{ds^{k_{j-1}}}\cdot\left[(s-s_j)^{k_j}\cdot F(s)\cdot e^{st}\right]$$

где s_j – полюса изображения, т.е. те значения «s» при которых полином $D_0(s)$ обращается в ноль; k_j – кратность j – го полюса.

Найдем полюса $s\cdot\left(s^2+\frac{2\cdot\beta}{T}\cdot s+\frac{1}{T^2}\right) = 0 \quad ==>$

$$s_1 = 0;\quad s_2 = -\frac{\beta}{T}+i\cdot\frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2}\qquad s_3 = -\frac{\beta}{T}-i\cdot\frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2}$$

По формуле Хэвисайда для переходной функции, имеем:

$$h(t) = \frac{K}{T^2}\cdot\sum_{j=1}\lim_{s\to s_j}\left[\frac{(s-s_j)}{s\cdot(s^2+\frac{2\cdot\beta}{T}\cdot s+\frac{1}{T^2})}\cdot e^{st}\right] \tag{4.6}$$

Для полюса $s_1 = 0$, имеем:

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{(s-0)}{s\cdot(s^2+\frac{2\cdot\beta}{T}\cdot s+\frac{1}{T^2})}\cdot e^{st}\right] = T^2$$

Ведем новые переменные m, n и выразим s_2 s_3 через новые переменные:

$$m = -\frac{\beta}{T}, \quad n = \frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \quad s_2 = m + i\cdot n; \quad s_3 = m - i\cdot n;$$

$$s^2 + \frac{2\cdot\beta}{T}\cdot s + \frac{1}{T^2} = (s - s_2)\cdot(s - s_3)$$

Тогда для второго предела -

$$\lim_{s\to s_2}\left[\frac{(s-s_2)}{s\cdot(s-s_2)\cdot(s-s_3)}\cdot e^{st}\right] = \frac{1}{(m+i\cdot n)\cdot 2\cdot i\cdot n}\cdot e^{m\cdot t}\cdot e^{i\cdot n\cdot t} = \rightarrow$$

Домножая числитель и знаменатель на $(m - i\cdot n)\cdot i$, для второго предела имеем

$$-\frac{n + m\cdot i}{(m^2+n^2)\cdot 2\cdot n}\cdot e^{m\cdot t}\cdot e^{i\cdot n\cdot t}.$$

Аналогично, для третьего предела, имеем -

$$\lim_{s\to s_3}\left[\frac{(s-s_3)}{s\cdot(s-s_2)\cdot(s-s_3)}\cdot e^{st}\right] = \frac{-n + m\cdot i}{(m^2+n^2)\cdot 2\cdot n}\cdot e^{m\cdot t}\cdot e^{-i\cdot n\cdot t}$$

Складывая второе и третье слагаемое:

$$\sum_2^3 = -\frac{e^{m\cdot t}}{(m^2+n^2)\cdot 2\cdot n}\cdot\left[\left(n\cdot\left(e^{i\cdot n\cdot t} + e^{-i\cdot n\cdot t}\right) + i\cdot m\cdot\left(e^{i\cdot n\cdot t} - e^{-i\cdot n\cdot t}\right)\right] =$$

$$= -\frac{e^{m\cdot t}}{(m^2+n^2)\cdot n}\cdot\left[\left(n\cdot\cos(n\cdot t) - m\cdot\sin(n\cdot t)\right)\right] =$$

$$-\frac{e^{m\cdot t}}{(m^2+n^2)}\cdot\left[\left(\cos(n\cdot t) - \frac{m}{n}\cdot\sin(n\cdot t)\right)\right]$$

Учитывая, что

$m = -\frac{\beta}{T}, \quad n = \frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2}$ имеем

$$(m^2+n^2) = \frac{\beta^2}{T^2} + \frac{1-\beta^2}{T^2} = \frac{1}{T^2}; \quad \frac{m}{n} = -\frac{\beta}{T}\cdot\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Для переходной функции (4.6) -

$$h(t) = \frac{K}{T^2}\cdot\left[T^2 - T^2\cdot e^{m\cdot t}\cdot\left(\cos(n\cdot t) + \frac{\beta}{T}\cdot\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\sin(n\cdot t)\right)\right] =$$

$$= \text{К}\cdot\left[1 - e^{-\frac{\beta}{T}\cdot t}\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2}\cdot t\right) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{T}\cdot\sqrt{1-\beta^2}\cdot t\right)\right)\right]$$

Введем новую переменную - частоту собственных колебаний:

$$\omega_c = \frac{1}{T}\sqrt{1-\beta^2}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Таким образом, в описании колебательного звена появилось три “новых” частоты $\omega_0 < \omega_m < \omega_c$:

ω_0 – частота свободных колебаний;

ω_m – частота, соответствующая максимальной амплитуде;

ω_0 – частота собственных колебаний.

Рассмотрим предельные случаи для $\beta = 1,\ \beta = 0$.

Если $\beta \to 0$, то $\omega_c \to \omega_0 = \frac{1}{T}$:

$h(t) = K \cdot \left[1 - e^{0\cdot t} \cdot \left(\cos\left(\frac{t}{T}\right) + 0 \cdot \sin\left(\frac{t}{T}\right)\right)\right]$ =K[1-cos$\left(\frac{t}{T}\right)$]. - переходная функция консервативного звена.

Если $\beta \to 1$, то $\omega_c \to 0$ собственных колебаний в звене нет

$h(t) = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left(1 + \frac{t}{T}\right)\right]$

В качестве примеров звена можно привести: двигатель постоянного тока при учете электромеханической и электромагнитной постоянных времени, электромашинный усилитель и т.п.