3. Частотный метод исследования линейных систем

3.1. Необходимые сведения из комплексного анализа

Комплексное число z = a + i b (алгебраическая форма) может быть представлено в полярных координатах z = $Me^{i\varphi}$ (М – модуль, φ – фаза). Может быть представлено в тригонометрической форме

z = M cos φ $\pm$ i M sin φ ($e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \ \sin\varphi$)

На комплексной плоскости, в координатах Re (действительная часть) и Im (мнимая часть), комплексное число геометрически представляется вектором.

Все составляющие комплексного числа связаны между собой следующими соотношениями:

$\text{M} = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = arctg\frac{b}{a}$; $a = Mcos\varphi$; $b = Msin\varphi$.

Над комплексными числами проводят те же арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление), что и над действительными. Сложение и вычитание более удобно проводить над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, а умножение и деление над числами, записанными в показательной форме.

Справедливо:

$1 = e^{i0}$; $-1 = e^{i\pi}$; $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$; $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

Связь преобразований Лапласа и Фурье

Преобразование Лапласа функции y(t)

$$y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

Преобразование Фурье функции y(t) при (y(t)=0 при t<0) определяется выражением

$$y(i\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-i\omega t}dt$$

Сравнивая преобразования Лапласа и Фурье, видно, что формально преобразование Фурье может быть получено из преобразования Лапласа простой заменой s на iω.

3.2. Частотные характеристики

Важную роль при описании линейных систем играют частотные характеристики, характеризующие реакцию объекта (системы) на гармонический сигнал. Гармонический сигнал используется при исследовании систем автоматического регулирования частотными методами.

Определение: Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена (системы) на единичное синусоидальное воздействие в установившемся режиме, т.е. в режиме вынужденных гармонических колебаний звена (системы).

Формула синусоидального воздействия может быть записана как:

$$\sin(\omega t+\varphi(\omega)) = \sin[(\omega\cdot(t+\varphi(\omega)/\omega)] = \sin[(\omega\cdot(t+\Delta t)].$$

Входное воздействие в изображениях Лапласа (таблица в разделе 2.3) имеет вид:

$$X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

При синусоидальном воздействии на выходе линейной системы в установившемся режиме будет сигнал -

$$y(t) = A(\omega)*\sin(\omega t+\varphi(\omega))$$

Функция A(ω) - амплитудная характеристика, φ(ω) – частотная характеристика. Для каждой частоты входного сигнала ω будет своя амплитуда и свой сдвиг фазы.

Для единичного гармонического воздействия и отклика на воздействие, имеем

$$\sin(\omega\cdot t) = e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

$$x(t) = e^{i\cdot\omega\cdot t} = \cos(\omega\cdot t) + i\cdot\sin(\omega\cdot t) \qquad (3.1)$$

$$y(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi) \rightarrow Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A(\omega)\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

Синусоидальный гармонический сигнал можно представить как вращение вектора длиной A вокруг начала координат с некоторой угловой скоростью ω, рад/с. Гармонический сигнал характеризуется такими параметрами, как амплитуда – A; период – T; фаза – φ.

Между периодом и угловой скоростью справедливы соотношения

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Если колебания начинаются не из нуля, то они характеризуются фазой колебаний, которая во временной области характеризуется отрезком Δt, но обычно фазу выражают в радианах – φ. Перевод осуществляется по формуле

$$\varphi = \frac{2\pi\cdot\Delta t}{T}$$

На практике для получения гармонического сигнала используется генератор синусоидальных колебаний.

Определим связь между передаточной функцией и гармоничным воздействием, пользуясь показательной формой.

Рассмотрим звено, уравнение динамики которого имеет следующий вид:

$$T_2^2 y''(t) + T_1 \; y'(t) + y(t) = K\left[\tau \cdot x'(t) + x \quad (t)\right]. \tag{3.2}$$

В показательной форме

$$(T_2^2 s^2 + T_1 \; s + 1) \cdot Y(s) = K[\tau \cdot s + 1] \cdot X(s).$$

Передаточная функция

$$W(s) = \frac{K[\tau \cdot s + 1]}{T_2^2 s^2 + T_1 \; s + 1}. \tag{3.3}$$

Запишем в показательной форме, используя соотношения (3.1):

$$\text{x(t)} = e^{i \cdot \omega \cdot t};$$
$$x'(t) = i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t};$$
$$y(t) = A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi(\omega)} \quad ;$$
$$y'(t) = A(\omega) \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$
$$y''(t) = A(\omega) \cdot (i \cdot \omega)^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

Подставляя в (3.2), имеем:

$$T_2^2 \cdot A(\omega) \cdot (i \cdot \omega)^2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi(\omega)} + T_1 \cdot A(\omega) \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{i\varphi} + A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi(\omega)} = K\left[\tau \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\omega t} + e^{i \cdot \omega \cdot t}\right];$$

или

$$A(\omega) \cdot e^{i\varphi} \cdot [\; T_2^2 \cdot (i \cdot \omega)^2 + T_1 \cdot (i \cdot \omega) + 1] = K[\, \tau \cdot (i \cdot \omega) + 1];$$

$$A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = \frac{K[\, \tau \cdot (i \cdot \omega) + 1]}{T_2^2 \cdot (i \cdot \omega)^2 + T_1 \cdot (i \cdot \omega) + 1}$$

Таким образом, выражение для передаточной функции,

$$A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = W(i \cdot \omega) = W(s)$$

$W(i \cdot \omega)$ – Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) или частотная передаточная функция.

$$W(i\omega) = \mathrm{A}(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = Re(\omega) + i \cdot Im(\omega) \tag{3.4}$$

Функции A(ω) и φ(ω) (они для каждой частоты принимают вещественные значения) называются соответственно амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками (АЧХ и ФЧХ). Амплитудно-частотная характеристика – это коэффициент усиления гармонического сигнала. Если на какой-то частоте ω значение A(ω) > 1, то входной сигнал усиливается, если A(ω) < 1, то вход данной частоты ослабляется.

Действительная часть амплитудно-фазовой характеристики Re(ω) называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ).

Мнимая часть амплитудно-фазовой характеристики Im(ω) называется мнимой частотной характеристикой (МЧХ). Между всеми частотными характеристиками существует связь. Зная одни из них, можно определить другие, т.е.

$$\mathrm{A}(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = \mathrm{M}(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = \mathrm{M}(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

Если использовать для представления W(s) форму W(s)=K·N(s)/L(s), где N(s), L(s)- полиномы по степеням s, (причем свободные члены равны 1), а К – общий коэффициент усиления звена (системы), то

$$W(i\cdot\omega) = \frac{K\cdot N(i\cdot\omega)}{L(i\cdot\omega)} \tag{3.5}$$

$$|W(i\cdot\omega)| = \frac{K\cdot|N(i\cdot\omega)|}{|L(i\cdot\omega)|} = A(\omega)$$

Сдвиг фазы φ(ω) можно определить по виду многочленов $N(i\cdot\omega)$ и $N(i\cdot\omega)$ т.е. как разность фаз (аргументов) числителя и знаменателя:

$$\varphi(\omega) = \arg\big(N(i\cdot\omega)\big) - \arg\big(L(i\cdot\omega)\big) \tag{3.6}$$

Построим АФЧХ для «абстрактного» звена (системы) с передаточной функцией:

$$W(s) = W(i\cdot\omega) = \frac{K\cdot N(i\cdot\omega)}{L(i\cdot\omega)}$$

Подставляя в формулу различные значения ω, получаем набор векторов на комплексной плоскости. Огибающая концов векторов в комплексной плоскости называется годографом.

Годограф – график в комплексной плоскости, на которой отмечены точки, соответствующие значениям передаточной функции системы для разных частот.

Действительная u(ω) и мнимая v(ω) части полученных векторов -

$$\mathrm{u}(\omega) = \mathrm{A}(\omega)\cdot\cos\big(\varphi(\omega)\big); \tag{3.7}$$

$$\mathrm{v}(\omega) = \mathrm{A}(\omega)\cdot\sin\big(\varphi(\omega)\big).$$

Амплитуда и сдвиг фазы рассчитываются для векторов, соответствующих положительным частотам и лежащих в 4 квадранте ω_1, ω_2, ω_3 по формулам:

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} \tag{3.8}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{v(\omega)}{u(\omega)} \qquad (3.9)$$

В общем случае для любых углов сдвига необходимо учитывать переход между квадрантами на плоскости. Тогда формула принимает вид:

$$\varphi(\omega) = -\pi \cdot \mathrm{j} + arctg\frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

где

j = 0, 2, 3, 4 … , если вектор в I и IV квадрантах;

j = 1, 3, 4, 4 … , если вектор в II и III квадрантах.

Во всех технических системах отклик системы, как правило, отстает от входного воздействия, то есть сдвиг фазы всегда отрицательный. Исходя из формулы (3.4), степень полинома L(s) выше, чем полинома N(s). Поскольку обычно степень полинома L(s) выше, чем полинома N(s), то с увеличением частоты на входе в звено (в систему) сдвиг фазы обычно отрицателен, т.е. сигнал на выходе звена еще больше отстает по фазе от входного сигнала при увеличении частоты.

В предельном случае, если частота растет до бесконечности, мы можем вообще не получить выходного воздействия. Обычно при $\omega \to \infty$ величина амплитуды на выходе звена стремится к 0, то есть $\lim A(\omega\to\infty) = 0$.

$W(i\cdot\omega)$ при замене ω на –ω имеет зеркальное изображение. Анализируя выражения (3.7):

u(ω) = u(-ω) – четная функция;

v(ω) = -v(-ω) – нечетная функция.

Амплитудно-фазовая характеристика также может рассматриваться как изображение Фурье от весовой функции:

$$W(i\omega) = \int_0^\infty w(t)e^{-i\omega t}dt = \int_0^\infty w(t)\cdot[\cos\omega t - i\ \sin\omega t]\ \ dt$$

Тогда

$$\mathrm{Re}(\omega) = \int_0^\infty w(t)\cdot\cos\omega t \quad dt$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = -\int_0^\infty w(t)\cdot\sin\omega t \quad dt$$

Используя формулу обратного преобразования Фурье, можно по амплитудно-фазовой характеристике (АФХ) получить весовую характеристику:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1) фильтр низких частот – пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, блокирует высокочастотные шумы и помехи;

2) фильтр высоких частот – пропускает высокочастотные сигналы, блокирует сигналы низкой частоты;

3) полосовой фильтр – пропускает только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2 ;

4) полосовой режекторный фильтр – блокирует только сигналы с частотами в полосе от ω_1 до ω_2, остальные пропускает.

Частотные характеристики во многих случаях можно снять экспериментально. Если объект устойчивый, на его вход подается гармонический сигнал $x(t) = \sin \omega t$ и записывается сигнал $y(t)$ на выходе. Определив амплитуду и сдвиг фазы для разных частот, можно построить по точкам амплитудную и фазовую частотные характеристики.

3.3. Логарифмические частотные характеристики

Кроме анализа свойств звена (системы) по годографу АФЧХ, широкое распространение получили анализ логарифмической амплитудной характеристики (ЛАХ) и фазочастотной характеристики (ФЧХ).

Как известно, $W(i \cdot \omega)$ – Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) или частотная передаточная функция.

$$W(i\omega) = \mathrm{A}(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = Re(\omega) + i \cdot Im(\omega) \qquad (3.10)$$

Вместо $A(\omega)$ было предложено использовать логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ): график, на котором по оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты ($\lg \omega$), а по оси ординат – величина $L_m(\omega) = 20\lg A(\omega)$, измеряемая в децибелах (дБ). При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс также откладывается логарифм частоты $\lg \omega$.

Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу). Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или диаграммой Боде.

Свойства логарифмических характеристик для произведения $W_1(s)\, W_2(s)$

$$20\lg A(\omega) = 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega)$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega)\ \phi_2(\omega)$$

3.4. Примеры и задания

Пример 1.

Найти амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики (АЧХ и ФЧХ) по известной передаточной функции системы

$$W(s) = \frac{2}{4s+1}.$$

Решение.

Частотные передаточные функции (передаточные функции по Фурье) получают теми же способами, что и операторы Лапласа. Только вместо преобразования Лапласа используется преобразование Фурье.

Частотная передаточная функция,

$$W(i\omega) = \mathrm{A}(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = Re(\omega) + i \cdot Im(\omega)$$

В данном случае:

$$W(i\omega) = \frac{2}{4i\omega+1} = \frac{2*(4i\omega-1)}{(4i\omega+1)*(4i\omega-1)} = \frac{2*(-4i\omega+1)}{(16\cdot\omega^2+1)} = \frac{2}{(16\cdot\omega^2+1)} - i\,\frac{8\cdot\omega}{(16\cdot\omega^2+1)}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$\mathrm{A}(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$$

Если $W(i\omega)$ дробь

$$W(i\omega) = \frac{Re_1(\omega) + i \cdot Im_1(\omega)}{Re_2(\omega) + i \cdot Im_2(\omega)},$$

то АЧХ –

$$M(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{\sqrt{Re_1^2(\omega)+Im_1^2(\omega)}}{\sqrt{Re_2^2(\omega)+Im_2^2(\omega)}} = \frac{2}{\sqrt{1+16\omega^2}}$$

ФЧХ -

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = arctg\frac{-\frac{8\cdot\omega}{(16\cdot\omega^2+1)}}{\frac{2}{(16\cdot\omega^2+1)}} = -\,arctg\,4\cdot\omega$$

Задание

№ 3.1. Определить сигнал y(t) на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы

x(t) = 2*sin10t

W(s) = 4 / (0.1s + 1)

№ 3.2.

a) Определить сигнал y(t) на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы

x(t) = 5*sin t, W(s) = 4 / s

b) Определить сигнал y(t) на выходе системы по известному входному сигналу и передаточной функции системы

x(t) = 8*sin 0,25t, W(s) = 10 / (4*s +1).

№ 3.3. Задана передаточная функция объекта $W(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+2s+3}$, требуется определить частотные характеристики.

Пример 2.

Представим процедуру частотного анализа в рамках SimInTech на примере модели механического демпфера, рассмотренного в разделе 2.7. Была получена модель демпфера, которая была представлена в форме системы уравнений Коши:

$$\frac{dY(t)}{dt} = Y1(t),$$

$$\frac{dY1(t)}{dt} = g + U(t)/m - \mu/m \cdot Y(t) - c/m \cdot \frac{dY(t)}{dt}$$

Количественные значения характеристик отвечали списку сигналов проекта.

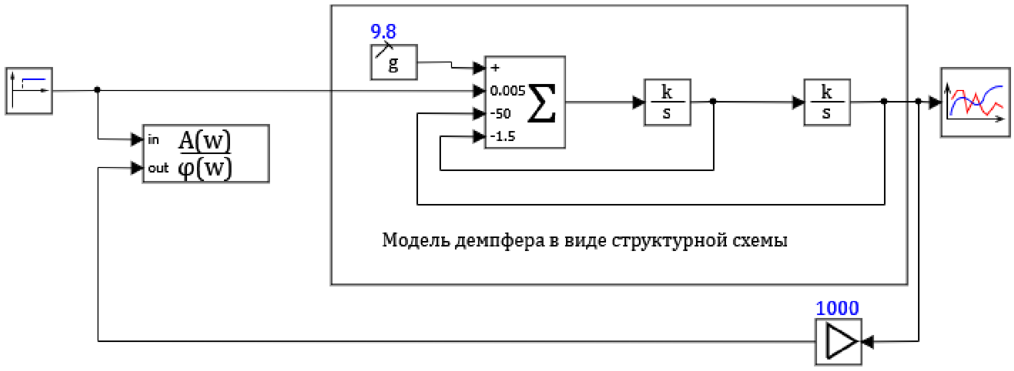
Список сигналов проекта: E:\Document-20230801\A1-МодСистемУправления-2024(240408)\Моделир-202...

№	Имя	Название	Тип данных	Режим	Формула	Значение	Способ расчёта
1	m	масса	Вещественн	Вход		200	Переменная
2	k	коэффиц. сопрот. пружины - мю	Вещественн	Вход		10000	Переменная
3	c	Коэф. трения	Вещественн	Вход		300	Переменная
4	g	Ускорение свобод.падения	Вещественн	Вход		9.8	Переменная
5	U0	Начальное значение силы	Вещественн	Вход		0	Переменная

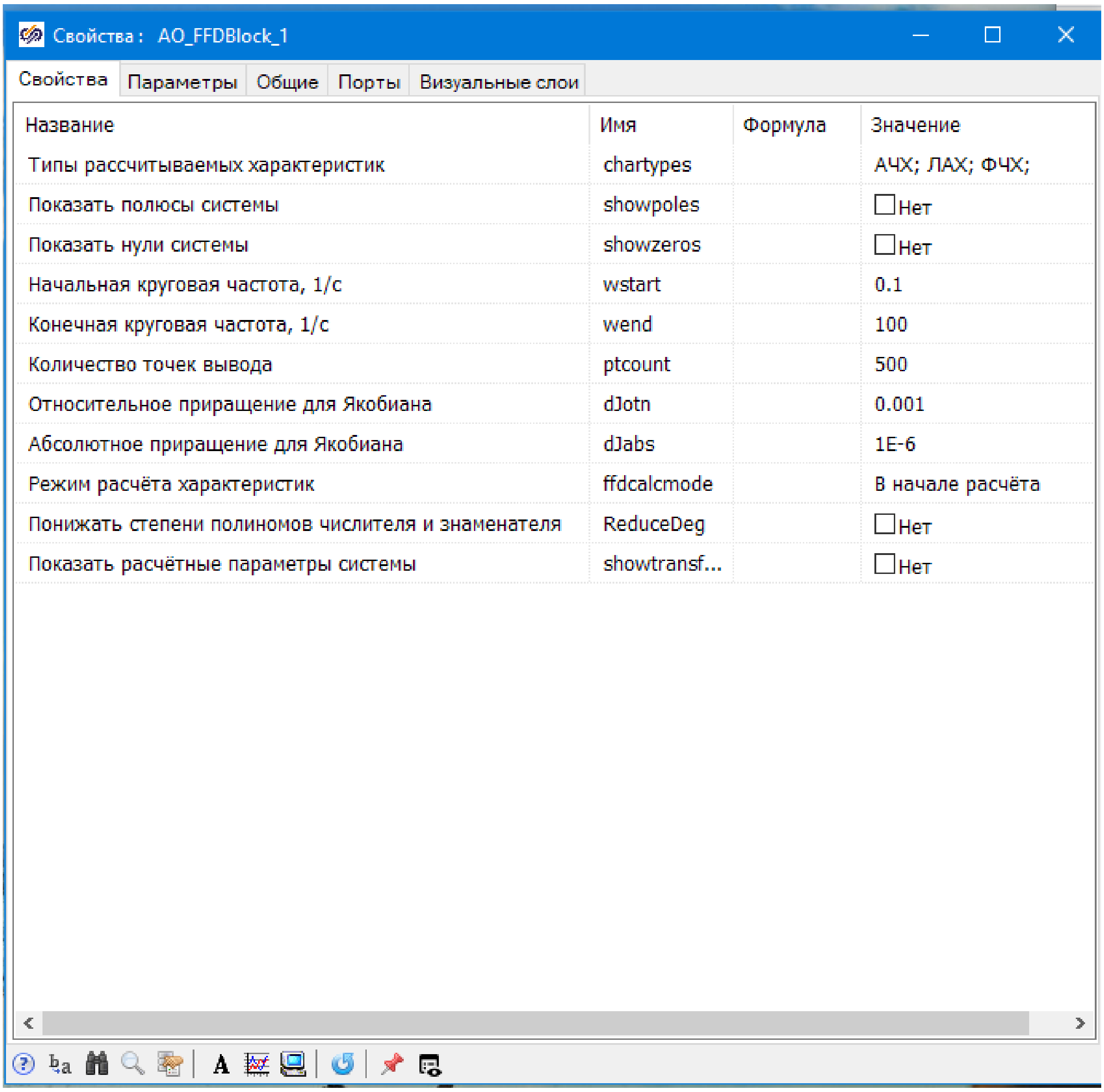
С учетом количественных значений списка сигналов, перепишем систему уравнений Коши в виде:

$$y'' = 9.8 + 1/200 \cdot u - 50 \cdot y - 1.5 \cdot y'$$

В качестве входа – возмущающее воздействие u, в качестве выхода – положение демпфера – y (для наглядности иллюстрации примем в качестве выхода y положение в миллиметрах (х1000), поскольку модель размерная и результат получается в метрах достаточно маленьким). Дополним схему блоком «Построение частотных характеристик».

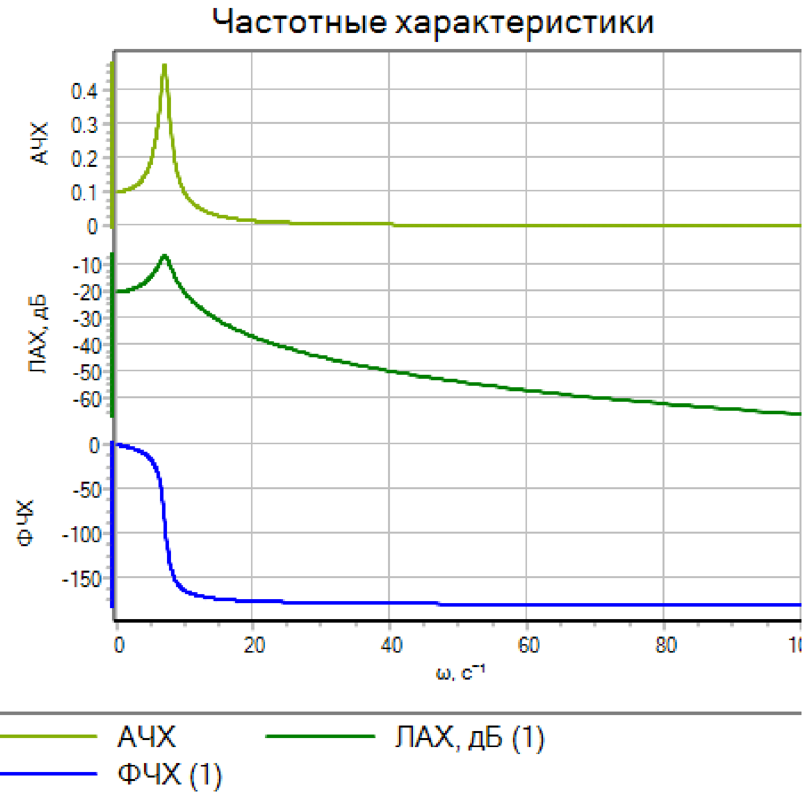


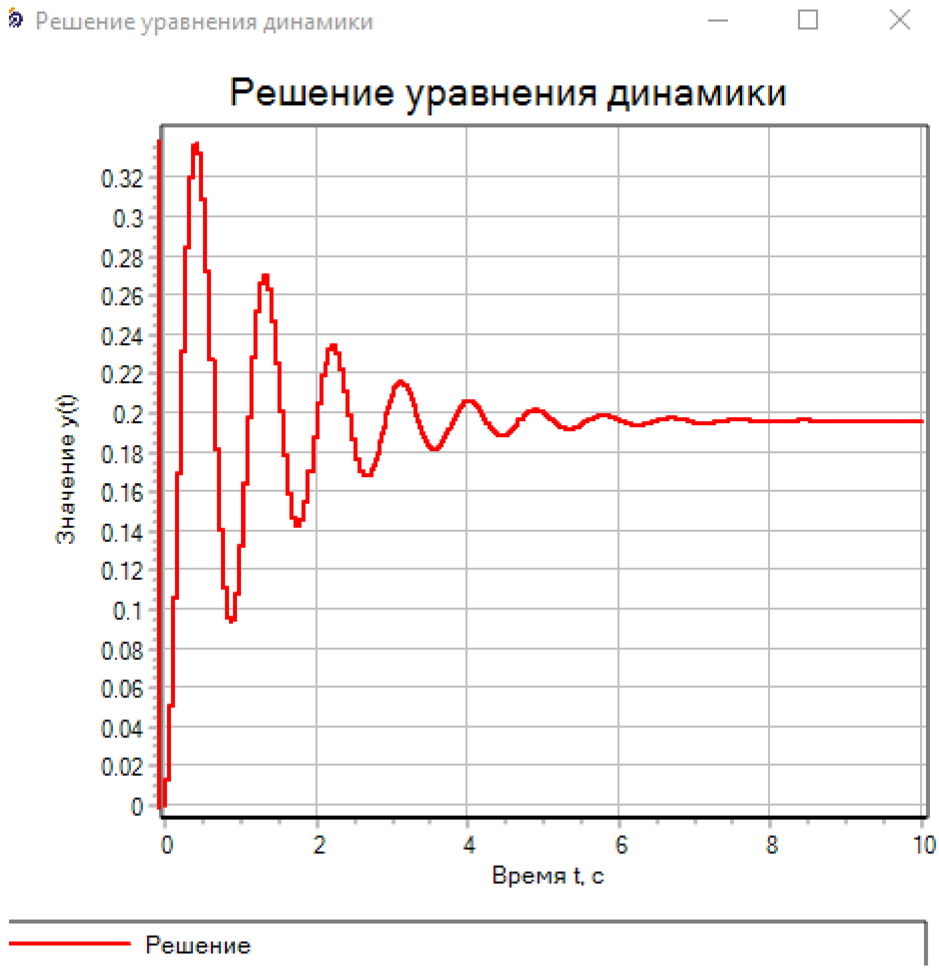
Свойства блока «Построение частотных характеристик» представлены на рисунке:



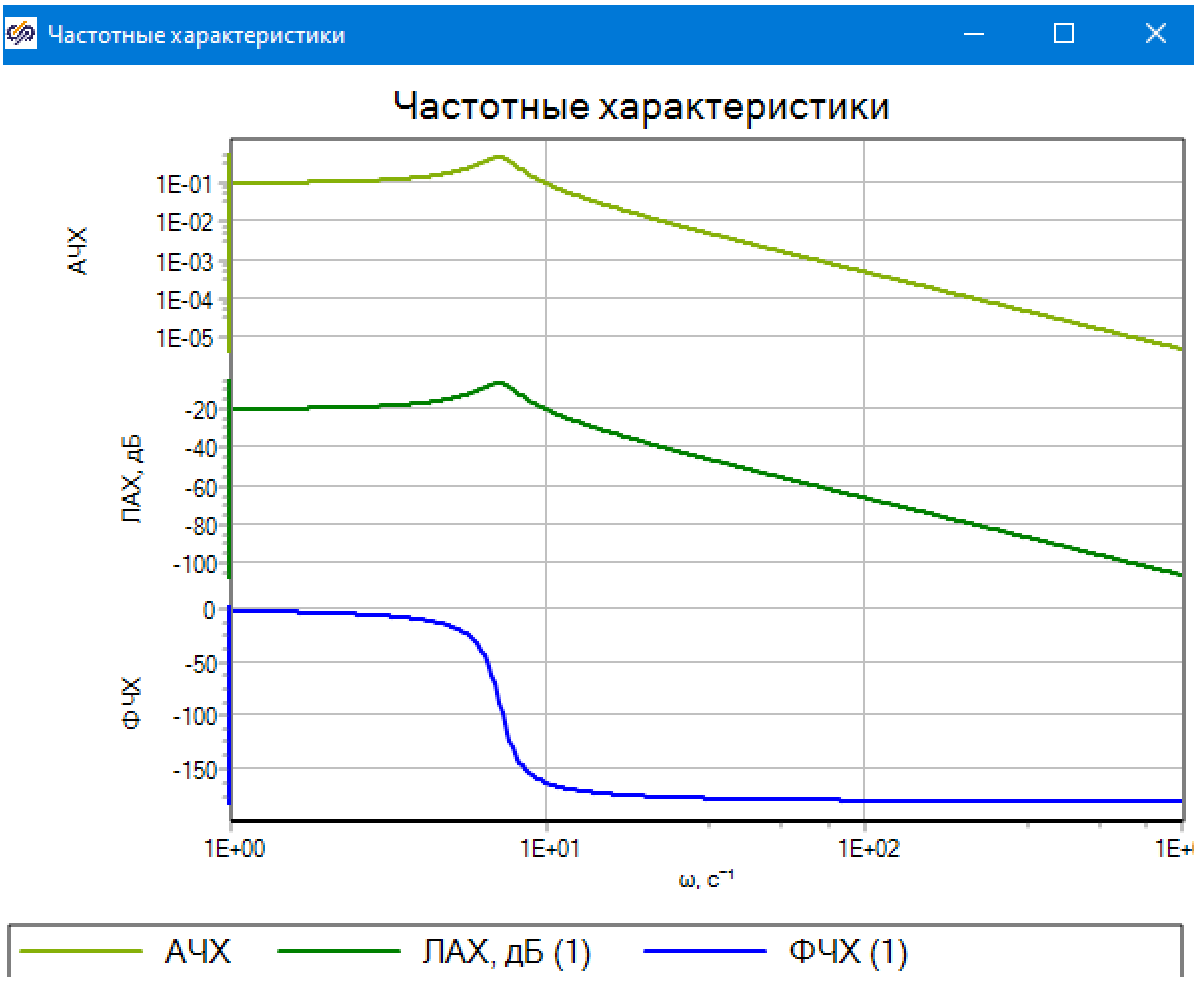
Название	Имя	Формула	Значение
Типы рассчитываемых характеристик	chartypes		АЧХ; ЛАХ; ФЧХ;
Показать полюсы системы	showpoles		Нет
Показать нули системы	showzeros		Нет
Начальная круговая частота, 1/с	wstart		0.1
Конечная круговая частота, 1/с	wend		100
Количество точек вывода	ptcount		500
Относительное приращение для Якобиана	dJotn		0.001
Абсолютное приращение для Якобиана	dJabs		1E-6
Режим расчёта характеристик	ffdcalcmode		В начале расчёта
Понижать степени полиномов числителя и знаменателя	ReduceDeg		Нет
Показать расчётные параметры системы	showtransf...		Нет

Результаты расчетов частотных характеристик и решение уравнения динамики (реакция демпфера на входной сигнал) представлены на рисунках:





Анализ графика частотных характеристик в линейном масштабе по ω чаще всего не очень удобен, поскольку весь график собирается в узкой области, а дальше график абсолютной амплитуды практически сливается с 0. Изменения масштаба шкалы АЧХ и ω на логарифмический дает возможность лучше исследовать частотные характеристики



3.5. Основные определения

$W(i \cdot \omega)$ – Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) или частотная передаточная функция.

$$W(i\omega) = \mathrm{A}(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} = Re(\omega) + i \cdot Im(\omega)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$\mathrm{A}(\omega) = |W(i\omega)| = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$$

Логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ)

$$L(\omega) = 20 \cdot lgM(\omega)$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$$

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$Re(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ).

$$Im(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

Преобразование Фурье функции y(t)

$$y(i\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-i\omega t}dt$$

3.5. Ответы и решения

№ 3.1. При воздействии гармонического сигнала, по окончанию переходного процесса, выходной сигнал будет также гармонический, но будет отличаться от входного сигнала амплитудой и фазой

$$y(t) = A(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)].$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)

$$W(i\omega) = Re(\omega) + i\cdot Im(\omega) = \frac{4}{1+0.1\cdot i\omega} = \frac{4}{1+(0.1\cdot\omega)^2} + i\cdot\frac{(-0.4\cdot\omega)}{1+(0.1\cdot\omega)^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = \frac{|4|}{|1+0.1\omega i|} = \frac{4}{\sqrt{1+(0.1\cdot\omega)^2}},$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} = arctg(-0.1\cdot\omega)$$

Учитывая, что частота $\omega = 10$, имеем для частотных характеристик:

$$A(\omega = 10) = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad \varphi(\omega = 10) = -arctg(1) = -\pi/4$$

Выходной сигнал -

$$y(t) = A(\omega)*A*\sin[\omega t+\varphi(\omega)] = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\sin(10t - \frac{\pi}{4})$$