

Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

Задача № 1

Стержень длиной L с постоянным по длине сечением погружен в теплоизолирующий материал. В начальный момент температура стержня $T_0 = 0$, а левый конец скачком приобретает температуру $T_c = 100$ °С. Правый конец стержня находится в теплоизолирующем материале. Рассчитать распределение температуры по стержню, соответствующее моменту времени $t = 5$ минут, если длина стержня $L = 0.25$ м, коэффициент теплопроводности материала стержня $a = 10^{-5}$ м²/с.

Пояснение.

Распределение температуры $T(x,t)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a * \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

с краевыми условиями: $T(x,0) = T_0$, $T(0,t) = T_c$, $\partial T / \partial x (L,t) = 0$.

Разностный аналог дифференциальной задачи расчета распределения температуры для сеточной функции U , которая аппроксимирует непрерывную функцию T , имеет вид

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{U_{i+1}^k - 2 * U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2}$$

Аппроксимация краевых условий приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} U_i^0 &= T_0 & i &= 0, 1, 2, 3 \dots, n \\ U_0^k &= T_c & k &= 0, 1, 2, 3 \dots, m \\ U_n^k &= U_{n-1}^k & k &= 0, 1, 2, 3 \dots, m \end{aligned}$$

Отметим, что последнее условие отвечает первому порядку аппроксимации; уравнение аппроксимации отвечает второму порядку. Для решения можно воспользоваться явной схемой. Для перехода с временного слоя k на слой $k+1$ имеем выражение

$$U_i^{k+1} = U_i^k + \tau * \frac{U_{i+1}^k - 2 * U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2}$$

[//https://www.programiz.com/cpp-programming/online-compiler/](https://www.programiz.com/cpp-programming/online-compiler/)

<https://www.programiz.com/cpp-programming/online-compiler/>

// Online C++ compiler to run C++ program online

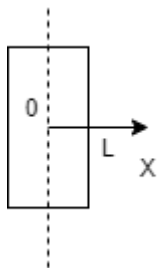
```
#include <iostream>
using namespace std;
int main() {
    const int n=20,
        stepPrint = 20 ; // Шаг печати()
    const double tau = 1.0;
    const double L = 0.25, a = 1.0E-5;
```

```

double T0 = 0, Tc = 100, tfinis = 5*60, h = L/(n-1), A = tay*a/(h*h) ;
double Tk[n], Tk1[n];
int kfinis = int ((tfinis/tay)/stepPrint);
for(int i=0; i<n; i++) Tk[i] = Tk1[i] = T0;
Tk[0] = Tk1[0] = 100;
for(int kk=0; kk<kfinis; kk++) {
    for(int k=0; k<stepPrint; k++) {
        for(int i=1; i<n-1; i++) Tk1[i] = Tk[i] + A*(Tk[i+1]-2*Tk[i]+Tk[i-1]);
        Tk1[n-1] = Tk1[n-2];
        for(int i=0; i<n; i++) Tk[i] = Tk1[i] ;
    }
    for(int i=0; i<n; i++) std::cout << "   "<<Tk[i] ;
    std::cout << "   "<< endl;
    std::cout << "   "<< endl;
}
return 0;
}

```

Задача № 2



Боковая поверхность латунного (Cu+1.0% Zn) диска толщиной 2 см хромирована, чтобы предотвратить испарение цинка. Примем, что диффузия цинка происходит в направлении, перпендикулярном торцам диска. Площадь торца – 50 см². Коэффициент диффузии цинка при температуре отжига $D = 10^{-11}$ м²/с. Рассчитать количество цинка, испарившегося в течение 16 часов отжига. Отжиг производится в вакууме. Плотность латуни – 8900 кг/м³.

РЕШЕНИЕ

Ось x из центра диска проходит перпендикулярно торцу диска. Граница $x=L$ отделяет латунь от вакуума. На границе происходит испарение.

Концентрационное поле в диске $C(x,t)$ описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D * \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Начальные условия $C(x, t = 0) = C_0 = 0.01 * 8900$ кг/м³.

Граничные условия:

$$\frac{\partial C(x=0)}{\partial x} = 0; \quad C(x = L) = 0.$$

Первое граничное условие следует из симметрии концентрационного поля относительно плоскости, проходящей через центр диска параллельно его торцам. Второе условие справедливо для случая отжига в вакуум.

$$\text{Диффузный поток } J = -D \frac{\partial C}{\partial x}$$

Поток массы через торец диска

$$I(t) = - \int_0^t D \frac{\partial C}{\partial x} * S dt, \quad S \text{ площадь торца диска.}$$

В безразмерных переменных $x / L \rightarrow x$, $D \cdot t / L^2 \rightarrow t$ задача расчета концентрационного профиля формулируется

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad C(x, 0) = C_0, \quad C'(0, t) = 0, \quad C(1, t) = 0.$$

Количество цинка, испарившегося в течении времени t через торцы диска:

$$I(t) = -2 \cdot \frac{\tau \cdot L \cdot S}{h} \sum_l^k (U_N^l - U_{N-1}^l), \quad k = \frac{D \cdot t}{L^2 \cdot \tau}$$

где τ , h – безразмерные шаги по времени и пространству;

L, S – полутолщина и площадь торца диска

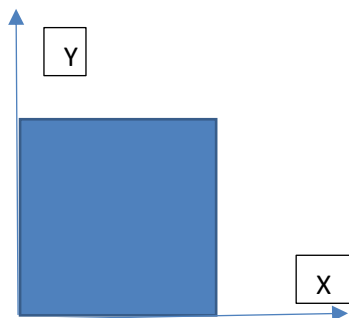
U – значение сеточной функции на l временном слое

Задача № 3

Элемент квадратного сечения (сплав на основе меди) погружается в жидкий теплоноситель из расплавленного металла с температурой $T_g = 600$ °С. Температура элемента перед погружением $T_0 = 100$ °С. Размеры сечения элемента 0.2×0.2 м. В третьем измерении размер элемента на порядок превосходит характерный размер в плоскости сечения. Коэффициент температуропроводности материала элемента $A = 10^{-5}$ м²/с. Рассчитать значение температуры в центре элемента, которое будет достигнуто к моменту времени $t = 10$ минут.

РЕШЕНИЕ

Оси X и Y расположим в плоскости сечения элемента.



Температурное поле в элементе $T(x, y, t)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right].$$

Начальные условия $T(x, y, t = 0) = T_0 = 100.0$.

Граничное условие $T(0, y, t) = T(L, y, t) = T(x, 0, t) = T(x, L, t) = T_g = 600$.

Разностный аналог дифференциальной задачи расчета распределения температуры для сеточной функции $U_{i,j}$, которая аппроксимирует непрерывную функцию T , имеет вид

$$\frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\tau} = \frac{U_{i+1,j}^k - 2 \cdot U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{hx^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2 \cdot U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{hy^2}$$

Аппроксимация краевых условий приводит к выражениям:

$$U_{i,j}^0 = T_0 \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots, nx; \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots ny$$

$$U_g^k = T_g \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots, m$$

Для решения можно воспользоваться явной схемой. Для перехода с временного слоя k на слой k+1 имеем выражение

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \tau * A * \left[\frac{U_{i+1,j}^k - 2*U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2*U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{h^2} \right]$$

Решение задачи иллюстрируется программой:

<https://www.programiz.com/cpp-programming/online-compiler/>

```
// Online C++ compiler to run C++ program online
#include <iostream>
using namespace std;
int main() {
    const int n=20,
            stepPrint = 50 ; // Шаг печати()
    const double tay = 1.0;
    const double L = 0.20, a = 1.0E-5;
    double T0 = 100, Tg = 600, tfinis = 10*60, h = L/(n-1), A = tay*a/(h*h) ;
    int iexit = (int)(n/2.0); int yexit = iexit;
    double time = 0;
    double Tk[n][n], Tk1[n][n];
    int kfinis = int ((tfinis/tay)/stepPrint);
    for(int i=0; i<n; i++) // Начальное условие по температуре
        for(int j=0; j<n; j++)
            Tk[i][j] = Tk1[i][j] = T0;
    for(int i=0; i<n; i++)
        Tk[i][0] = Tk1[i][0] = Tk[i][n-1] = Tk1[i][n-1]=Tg;
    for(int j=0; j<n; j++)
        Tk[0][j] = Tk1[0][j] = Tk[n-1][j] = Tk1[n-1][j]=Tg;

    for(int kk=0; kk<kfinis; kk++) {
        for(int k=0; k<stepPrint; k++) {
            for(int i=1; i<n-1; i++)
                for(int j=1; j<n-1; j++)
                    Tk1[i][j] = Tk[i][j] + A*(Tk[i+1][j]-2*Tk[i][j]+Tk[i-1][j]+
                    Tk[i][j+1]-2*Tk[i][j]+Tk[i][j-1]);
            for(int i=0; i<n; i++)
                for(int j=0; j<n; j++)
                    Tk[i][j] = Tk1[i][j] ;
            time+=tay;
        }
        std::cout << " time,c= " <<time<<" T,град="<<Tk[iexit][yexit] << endl;
    }
    return 0;
}
```

Результат работы программы отражает динамику изменения температуры в центре элемента T,град в зависимости от времени процесса нагрева time,c

time,c = 50 T,град=104.455
time,c= 100 T,град=153.306
time,c= 150 T,град=230.567
time,c= 200 T,град=305.152
time,c= 250 T,град=367.794
time,c= 300 T,град=418.034
time,c= 350 T,град=457.669
time,c= 400 T,град=488.749
time,c= 450 T,град=513.065
time,c= 500 T,град=532.073
time,c= 550 T,град=546.927
time,c= 600 T,град=558.533

