§ 3. Решение разностных краевых задач для уравнений второго порядка

1. Решение разностных краевых задач методом прогонки. Краевая задача

$$a_iy_{i-1}-c_iy_i+b_iy_{i+1}=-f_i,\quad a_i\neq 0,\quad b_i\neq 0,$$
$$i=1,\,2,\,\ldots,\,N-1,\qquad (1)$$
$$y_0=\varkappa_1y_1+\mu_1,\quad y_N=\varkappa_2y_{N-1}+\mu_2$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей размера $(N+1)\times(N+1)$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -\varkappa_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ a_1 & -c_1 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & -c_i & b_i & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varkappa_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вместо (1) можно написать

$$Ay=f,\quad y=(y_0,\,y_1,\,\ldots,\,y_N),\quad f=(\mu_1,\,-f_1,\,\ldots,\,-f_{N-1},\,\mu_2).\qquad (2)$$

В случае первой краевой задачи соответствующая матрица имеет размерность $(N-1)\times(N-1)$.

Для решения краевой задачи (1) можно использовать следующий метод исключения, называемый *методом прогонки*. Предположим, что имеет место соотношение

$$y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1}\qquad (3)$$

с неопределенными коэффициентами α_{i+1} и β_{i+1}, и подставим $y_{i-1}=\alpha_iy_i+\beta_i$ в (1):

$$(a_i\alpha_i-c_i)y_i+b_iy_{i+1}=-(f_i+a_i\beta_i),$$

сравнивая это тождество с (3), находим

$$\alpha_{i+1}=\frac{b_i}{c_i-a_i\alpha_i},\qquad i=1,2,\ldots,N-1,\qquad (4)$$
$$\beta_{i+1}=\frac{a_i\beta_i+f_i}{c_i-a_i\alpha_i},\qquad i=1,2,\ldots,N-1.\qquad (5)$$

Используем краевое условие при $i=0$ для определения

α_1, β_1. Из формул (3) и (1) для $i=0$ находим

$$\alpha_1=\varkappa_1,\quad \beta_1=\mu_1.\qquad (6)$$

Зная α_1 и β_1 и переходя от i к $i+1$ в формулах (4) и (5), определим α_i и β_i для всех $i=2,\,3,\,\ldots,\,N$. Вычисления по формуле (3) ведутся путем перехода от $i+1$ к i (т. е. зная y_{i+1}, находим y_i), и для начала этих вычислений надо задать y_N. Определим y_N из краевого условия $y_N=\varkappa_2y_{N-1}+\mu_2$ и условия (3) при $i=N-1$: $y_{N-1}=\alpha_Ny_N+\beta_N$. Отсюда находим

$$y_N=\frac{\mu_2+\varkappa_2\beta_N}{1-\alpha_N\varkappa_2}.\qquad (7)$$

Соберем все формулы прогонки и запишем их в порядке применения:

$$\overset{(\rightarrow)}{\alpha_{i+1}}=\frac{b_i}{c_i-a_i\alpha_i},\qquad i=1,2,\ldots,N-1,\quad \alpha_1=\varkappa_1;\qquad (8)$$
$$\overset{(\rightarrow)}{\beta_{i+1}}=\frac{a_i\beta_i+f_i}{c_i-a_i\alpha_i},\qquad i=1,2,\ldots,N-1,\quad \beta_1=\mu_1;\qquad (9)$$
$$\overset{(\leftarrow)}{y_i}=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\qquad i=N-1,N-2,\ldots,2,1,\,0,$$
$$y_N=\frac{\mu_2+\varkappa_2\beta_N}{1-\alpha_N\varkappa_2}.\qquad (10)$$

Стрелки показывают направление счета: $(\rightarrow)$ от i к $i+1$, $(\leftarrow)$ — от $i+1$ к i.

Таким образом, краевая задача для уравнения второго порядка сведена к трем задачам Коши для уравнений первого порядка.

2. Устойчивость метода прогонки. Формулы прогонки можно применять, если знаменатели дробей (8) и (10) не обращаются в нуль. Достаточными условиями этого являются неравенства

$$\begin{aligned}&|c_i|\geqslant|a_i|+|b_i|,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,N-1,\\ &|\varkappa_1|\leqslant 1,\quad |\varkappa_2|\leqslant 1,\quad |\varkappa_1|+|\varkappa_2|<2.\end{aligned}\qquad (11)$$

Покажем, что при условиях (11) знаменатели $c_i-a_i\alpha_i$ и $1-\alpha_N\varkappa_2$ не обращаются в нуль и

$$|\alpha_i|\leqslant 1,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,N.\qquad (12)$$

Предположим, что $|\alpha_i|\leqslant 1$, и покажем, что $|\alpha_{i+1}|\leqslant 1$;