

## Примеры построения и исследования моделей

### 1. Управление уровнем воды в баке

Построим модель, связывающую высоту уровня воды в баке -  $h$ , м с расходом вытекающей воды -  $q$ , м<sup>3</sup>/с, если площадь сечения бака  $S$ , а площадь выходного отверстия  $S_0$ .

Закон Бернулли в данном случае, приводит к уравнению

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2},$$

$\rho$ , кг/м<sup>3</sup> - плотность жидкости;  $g = 9.81$ , м/с<sup>2</sup>;  $v$ , м/с - скорость вытекания жидкости. Отсюда  $v = \sqrt{2gh}$ , или переходя к расходу  $q = S_0 v$ , приходим к нелинейному уравнению

$$q = S_0 \sqrt{2gh}.$$

Вход модели - высота уровня воды в баке  $h(t)$ , выход - расход вытекающей воды  $q(t)$ . Уравнение нелинейное, но его можно линеаризовать относительно номинальной (рабочей) точки ( $h_0$ ;  $q_0$ ).

Модифицируем модель. Положим, что в бак подкачивают воду насосом, расход воды которого  $Q$  (входной параметр модели), а выход - высота уровня воды  $h$ . За время  $\Delta t$  объем добавленной воды -  $Q\Delta t$ , объем вытекшей из бака воды -  $q\Delta t$ . Изменение уровня воды -

$$\Delta h = \frac{Q - q}{S} \Delta t$$

Переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$  имеем уравнение, связывающее высоту уровня воды в баке  $h(t)$  с расходом насоса  $Q$  (входной параметр модели),

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{Q(t) - S_0 \sqrt{2gh(t)}}{S} = F(Q, h) \quad (1.1)$$

В установившемся режиме  $dh/dt = 0$ . Следовательно, в стационарном режиме (рабочая точка)  $h_0 = Q_0^2 / (2 * g * S_0^2)$ .

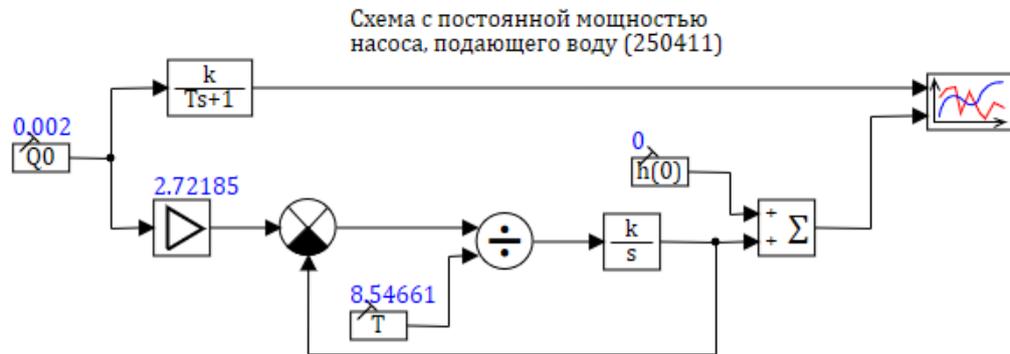
Раскладывая функцию  $F(Q, h)$  в ряд Тейлора относительно рабочей точки и ограничиваясь первыми членами разложения

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} = F(Q_0, h_0) + \frac{\partial F}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial F}{\partial h} \Delta h = F(Q_0, h_0) + \frac{1}{S} + \frac{S_0 \cdot \sqrt{g}}{S \cdot \sqrt{2 \cdot h_0}}$$

В окрестности рабочей точки  $F(Q_0, h_0) = 0$ , (стационарный режим  $dh/dt = 0$  в соответствии с (1.1)). Тогда приходим к линеаризованному уравнению (опуская знак приращения  $\Delta$ ) -

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h h(t) = k_Q Q(t), \quad k_h = \frac{S_0 \cdot \sqrt{g}}{S \cdot \sqrt{2 \cdot h_0}}, \quad k_Q = \frac{1}{S}. \quad (1.2)$$

На рисунках представлено решение уравнения (1.2), используя разные способы решения.



Скрипт страницы –

// Модель уровня воды в бак 250411

Initialization

var // Рабочая точка

g = 9.81, // м2/с

R0 = 0.0525, // ,m -радиус выходного отверстия

Rb = 1, // ,m -радиус бака

Q0 = 0.002, // ,м3/с - расход насоса, подающего воду

S0 = 3.14\*R0^2, // ,м2 - площадь выходного отверстия

h0 = Q0^2/(2\*g\*S0^2), // ,m- высота уровня жидкости в раб. точке

S = 3.14\*Rb^2, // ,м2 - площадь бака радиуса Rb м

// Коэффициенты уравнения 1.2

k\_h = S0\*sqrt(g)/(S\*sqrt(2\*h0)),

k\_Q = 1.0/S,

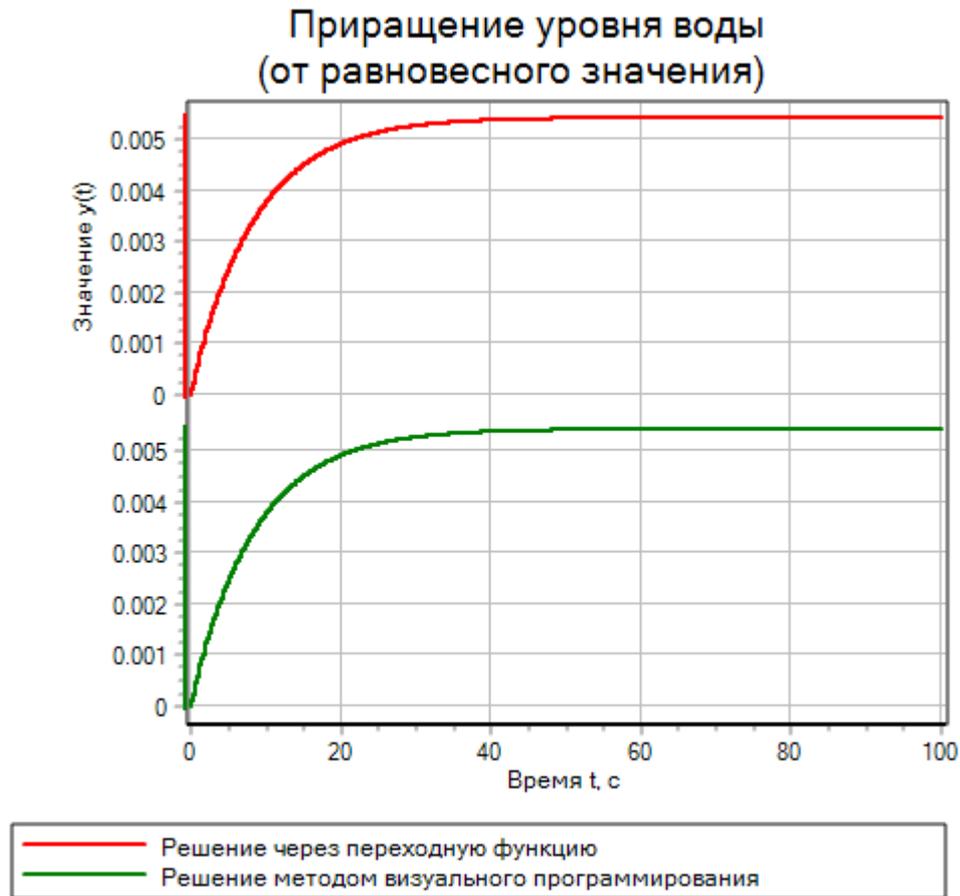
// Коэффициенты передаточной функции

k = k\_Q/k\_h,

T = 1/k\_h,

t\_fin = 100; // Интервал моделирования, с

end;



### Моделирование управления

Для задачи (1.2):  $h$  – регулируемая величина;  $Q$  – сигнал управления.

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(t) - q(t)) dt \quad (1.3)$$

Здесь  $h(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $q(t)$  – отклонения от номинальных значений. (1.3) можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)] \quad (1.4)$$

В качестве обратной связи используется сигнал с датчика уровня воды –  $h_0(t)$ . Ошибка управления  $e(t) = h_0(t) - h(t)$ . Простой регулятор – усилитель с коэффициентом  $K$  (или пропорциональный регулятор,  $P$  – регулятор), который управляет потоком по закону

$$q(t) = K * e(t) = K * [h_0(t) - h(t)]. \quad (1.5)$$

Структурная схема системы управления показана на рисунке 1.1. Объект – это звено, модель которого – оператор интегрирования. С помощью кружка с секторами обозначается сложение (вычитание) сигналов. Кроме сигналов, о которых уже шла речь, на рисунке показан также шум измерения)  $m(t)$ , искажающий показания датчика.

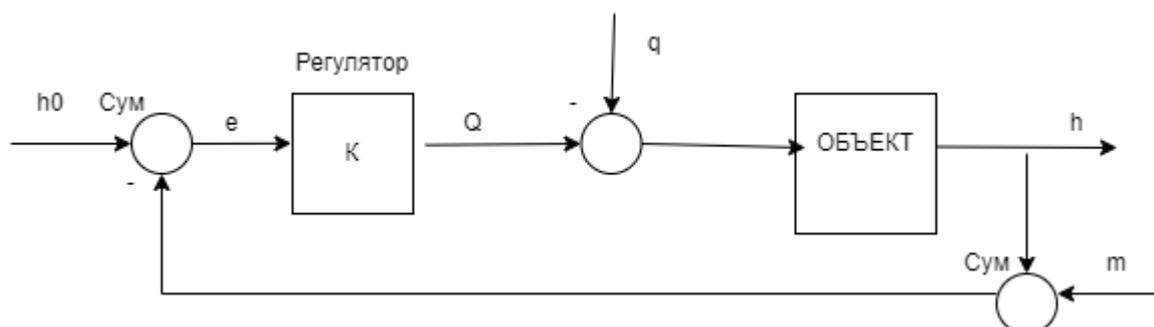
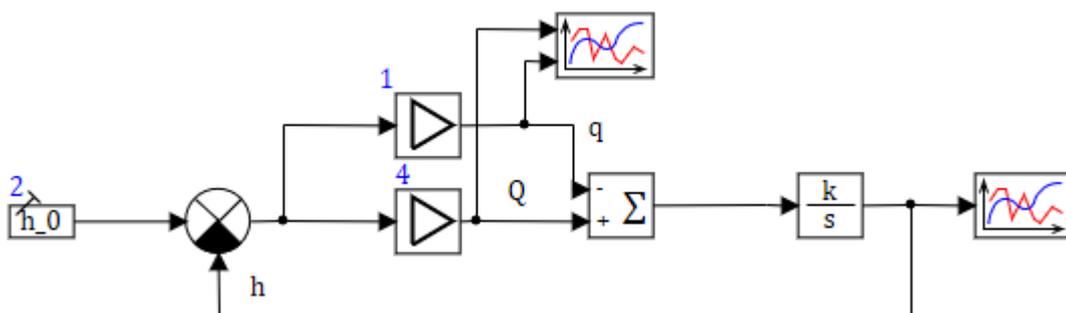


Рис. 1.1. Структурная схема управления насосом

На следующем рисунке представлена модель системы управления насосом, выполненная в рамках программы модельно ориентированного проектирования систем автоматического управления (SimInTech). Также представлены некоторые результаты исследования модели.



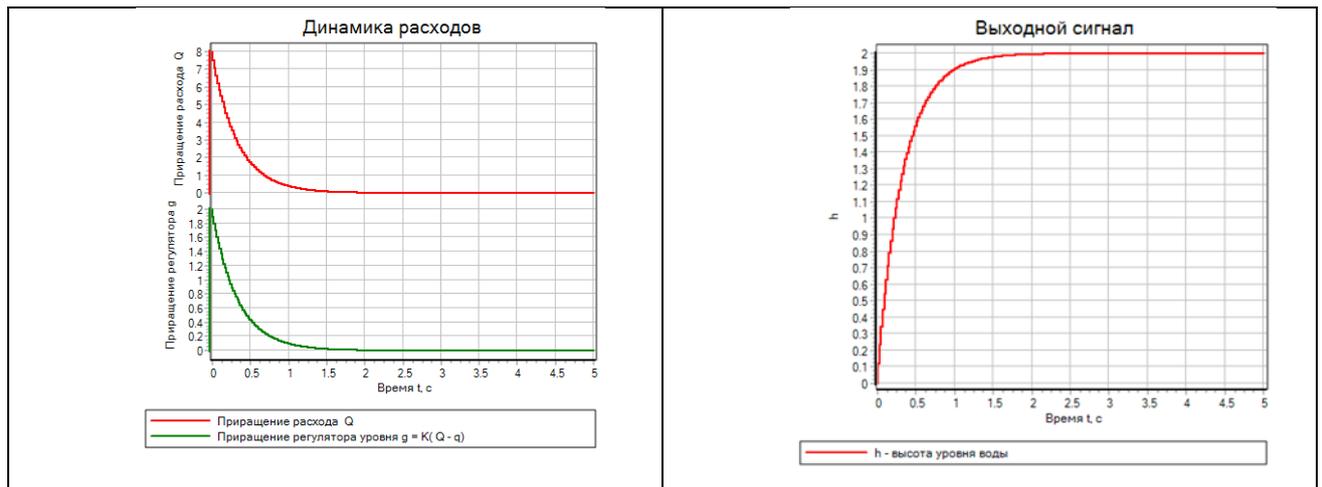


Рис. 1.2. Модель системы управления (SimInTech) насосом и некоторые результаты исследования модели.

Из графика «Выходной сигнал» следует, что система обрабатывает заданную величину «Высота уровня воды  $h$ » примерно за 2.5 с при выбранных коэффициентах усиления.

Таким образом, в данном разделе, после весьма краткого и весьма поверхностного вхождения в тему «Проектирования систем управления» была построена математическая модель функционирования насоса (1.2). Модель выявила, что изменение уровня воды  $dh(t)$  в баке определяется входным и выходным расходами воды.

Математическая модель системы управления строится на основании соотношений (1.4) и (1.5). При этом мы опираемся на общую схему систем управления. Модель системы управления – конкретизация общей модели. Здесь входная величина – высота уровня воды –  $h_0$ . На схеме 1.3. это левый блок. В SimInTech – это блок константы. В данном случае задается  $h_0 = 2$  м. Сигнал  $h_0$  подается в сравнивающее устройство, в которое также подается сигнал обратной связи  $h$ , полученный после интегратора (на схеме это блок

$$\frac{k}{s}$$

Сигнал  $e(t)$  - ошибка управления  $e(t) = h_0(t) - h(t)$  подается в усилители сигналов с коэффициентами усиления 1 и 2 соответственно. После усилителей сигналы  $q$  и  $Q$  поступают в блок сумматора.

Таким образом, каждая система управления может быть представлена двумя основными частями: управляемым объектом и источником управления. Управляемыми объектами могут быть: живые организмы, космические станции, технологические процессы, отдельные станки, машины. Общим во всех этих случаях является то, что мы можем управлять объектом, т.е. влиять на его поведение. Как правило, переход управляемого

объекта из начального состояния в конечное состояние можно осуществлять различными способами. Поэтому возникает вопрос о выборе наиболее рационального пути перехода, т.е. о нахождении наилучшего с определенной точки зрения способа управления объектом. Поскольку все системы управления, которые используются в различных сферах человеческой деятельности, в принципе предназначены осуществлять управление наилучшим способом, то главной задачей теории управления можно считать исследование оптимальных систем управления.

Для решения поставленной задачи управления объектом предназначено управляющее устройство (источник управления). Источник управления действует на управляемый объект.

## 2. Пример с моделью механического демпфера (возмущающая сила действует сверху)

Модель механического демпфера - это поршень на пружине. Поршень движется внутри вертикального цилиндра и может перемещаться вверх-вниз. Его положение – это интересующая нас функция  $Y(t)$ . Сверху на него воздействует возмущающая сила ( $U(t)$ ), на стенках поршня действует сила вязкого трения.

Согласно 2-му закону Ньютона ускорение тела пропорционально сумме сил, действующих на тело:

$$m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = \sum F_k = m \cdot g + U(t) - \mu \cdot Y(t) - c \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \quad (2.1)$$

$Y(t)$  [м] – положение поршня;

$P = m \cdot g$  [кг\*м/с<sup>2</sup>] - сила тяжести;

$F_{\text{пр}} = \mu \cdot Y(t)$  [(кг/с<sup>2</sup>)\*м] – сила сопротивления пружины;

$F_{\text{тр}} = c \cdot \frac{dY(t)}{dt}$  [(кг/с) \* (м/с)] - сила вязкого трения (пропорциональная скорости движения поршня).

Считаем, что в нулевой момент времени поршень находится в равновесии. Тогда начальное положение поршня —  $y_0$  в равновесии, где скорость и ускорения равны 0. Из уравнения (2.1):

$$0 = m \cdot g + u_0 - \mu \cdot y_0 \rightarrow y_0 = (m \cdot g + u_0) / \mu .$$

Данное уравнение позволяет определить, в каком положении будет поршень при различных нагрузках. Но нас интересует не конечное положение поршня, а процесс перехода из одного состояния в другое.

Для анализа переходного процесса и создана теория автоматического управления ТАУ. По типовой «технологии создания моделей» согласно этой

теории, предлагается рассматривать систему не в абсолютных значениях, а в отклонениях от равновесного состояния. Такая постановка упрощает решение и построение. И в самом деле, если заменить абсолютные значения на отклонения, то получим  $Y(t) = y_0 + y(t)$ ;  $U(t) = u_0 + u(t)$ ,

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t) - \mu \cdot y(t) - c \cdot \frac{dy(t)}{dt}. \quad (2.2)$$

Преобразуем уравнение, чтобы коэффициент у значения выходной переменной был равен 1, и перенесем в правую часть множители с выходными значениями  $y(t)$ , а в левую – с входными воздействиями  $u(t)$ :

$$\frac{m}{\mu} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{\mu} u(t).$$

В операторной форме  $(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1) \cdot y(t) = k_1 \cdot u(t)$ ,  
где  $T_2^2 = \frac{m}{\mu}$ ;  $T_1 = \frac{c}{\mu}$ ;  $k_1 = \frac{1}{\mu}$ .

Передаточная функция

$$w = \frac{k_1}{(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1)}. \quad (2.3)$$

Таким образом, из уравнений физики получена передаточная функция в виде блока, и полученный блок представляет собой стандартное колебательное звено из ТАУ.

Представим уравнение (2.2) в форме системы уравнений Коши:

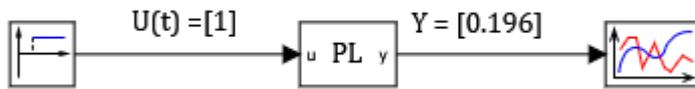
$$\frac{dY(t)}{dt} = Y1(t),$$

$$\frac{dY1(t)}{dt} = g + U(t)/m - \mu/m \cdot Y(t) - c/m \cdot \frac{dY(t)}{dt}$$

Программа, отвечающая системе уравнений в SimInTech:

```
input U;
output Y;
// Начальные условия
init
Y1 = 0,
Y = 1/k*(m*g+U0); // k - мю
// Система уравнений в форме Коши
Y' = Y1;
Y1' = g + u/m - k/m*Y - c/m*Y1;
```

Модель демпфера в виде структурной схемы SimInTech:



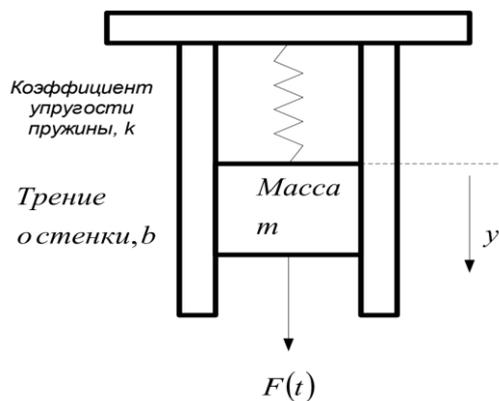
Список сигналов проекта:

№	Имя	Название	Тип данных	Режим	Формула	Значение	Способ расчёта
1	<b>m</b>	<b>масса</b>	<b>Веществен</b>	Вход		<b>200</b>	Переменная
2	<b>k</b>	<b>коэффиц. сопрот. пружины - мя</b>	<b>Веществен</b>	Вход		<b>10000</b>	Переменная
3	<b>c</b>	<b>Коеф. трения</b>	<b>Веществен</b>	Вход		<b>300</b>	Переменная
4	<b>g</b>	<b>Ускорение свобод.падения</b>	<b>Веществен</b>	Вход		<b>9.8</b>	Переменная
5	<b>U0</b>	<b>Начальное значение силы</b>	<b>Веществен</b>	Вход		<b>0</b>	Переменная

Запуская схему на выполнение, получаем график, отражающий реакцию демпфера на входной сигнал.



### 3. Модель механического амортизатора



**Решение должно содержать:**

- 1) Дифференциальное уравнение, описывающее динамику массы  $m$ .
- 2) Перевод дифференциального уравнения в передаточную функцию.
- 3) Результат моделирования полученной передаточной функции в SimInTech со следующими исходными данными:  $k = 5$ ;  $b = 0,5$ ;  $m = 0,1$ ;  $F = 100$ .

Решение.

1. При малых отклонениях от равновесия, уравнение имеет вид:

$$m \times y'' = F(t) - b \times y' - k \times y \implies F(t)/k = [(m/k) \cdot p^2 + (b/k) \cdot p + 1] y$$

2. Передаточная функция:

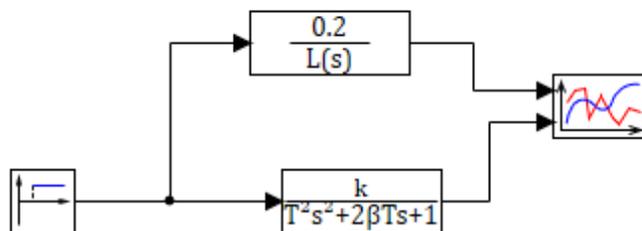
$$W = \frac{y}{F} = \frac{1/k}{\left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1\right)}$$

3. Результаты моделирования:

Схема в SimInTech, где используются

А) передаточная функция общего вида библиотеки «Динамические»

В) передаточная функция колебательного звена библиотеки «Динамические»



Скрипт проекта:

Файл Плавка Поиск Расчёт Справка Инструменты

```

1 // Уравнение динамики
  // (m/k) y'' + (b/k) y' + y = (1/k) F(t)
  // Передаточная функция
  // W = y/F = (1/k) / [(m/k)p^2 + (b/k)p + 1]
  k = 5;
  b = 0.5;
  m = 0.1;
  F = 100;
  T = sqrt(m/k);
10 betta = b/(2*sqrt(k*m));
  
```

Просмотр значений переменных

Имя переменной	Тип	Значение	Флаги
Локальные переменные			
k	Вещественное	5	const;
b	Вещественное	0.5	const;
m	Вещественное	0.1	const;
F	Вещественное	100	const;
T	Вещественное	0.1414213562	const;
beta	Вещественное	0.3535533906	const;
Основная секция кода			
Секция инициализации			
Секция финализации			
Интерпретируемые свойства			
Функции			

Результаты:

График

— □ ×

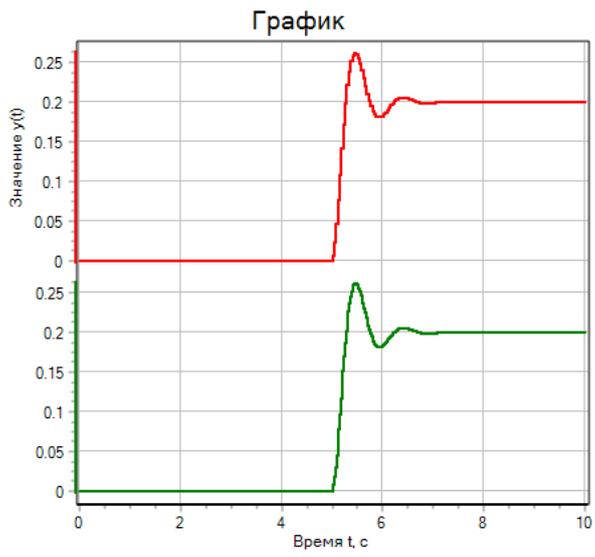


График 1    График 2

#### 4. Пример моделирования переходного процесса.

Предварительно исследуем переходной процесс аналитически, а затем исследуем его средствами SimInTech. Сравним результаты.

Положим, что аналитическое выражение переходного процесса на выходе звена, имеет вид -

$$2 \cdot y''(t) + 5 \cdot y'(t) + 2 \cdot y(t) = 1 - e^{-t} \quad (3.6)$$

$$y(t = 0) = 0; \quad y'(t = 0) = 0;$$

Решение.

Однородное уравнение

$$2 \cdot y''(t) + 5 \cdot y'(t) + 2 \cdot y(t) = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:  $2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ ; решая, имеем:  $\lambda_1=2, \lambda_2=0.5$  тогда:

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-0.5t}.$$

По виду временной функции в правой части (3.6)

$$y_d(t) = A + B e^{-t} \rightarrow y'_d(t) = -B e^{-t} \rightarrow y''_d(t) = B e^{-t}.$$

Подставляя в (3.6), приходим к выражению  $y_d(t) = 1/2 - e^{-t}$ .

Для общего решения  $y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-0.5t} + 0.5 - e^{-t}$ .

С учетом начальных условий (определяя  $C_1$  и  $C_2$ ), имеем решение

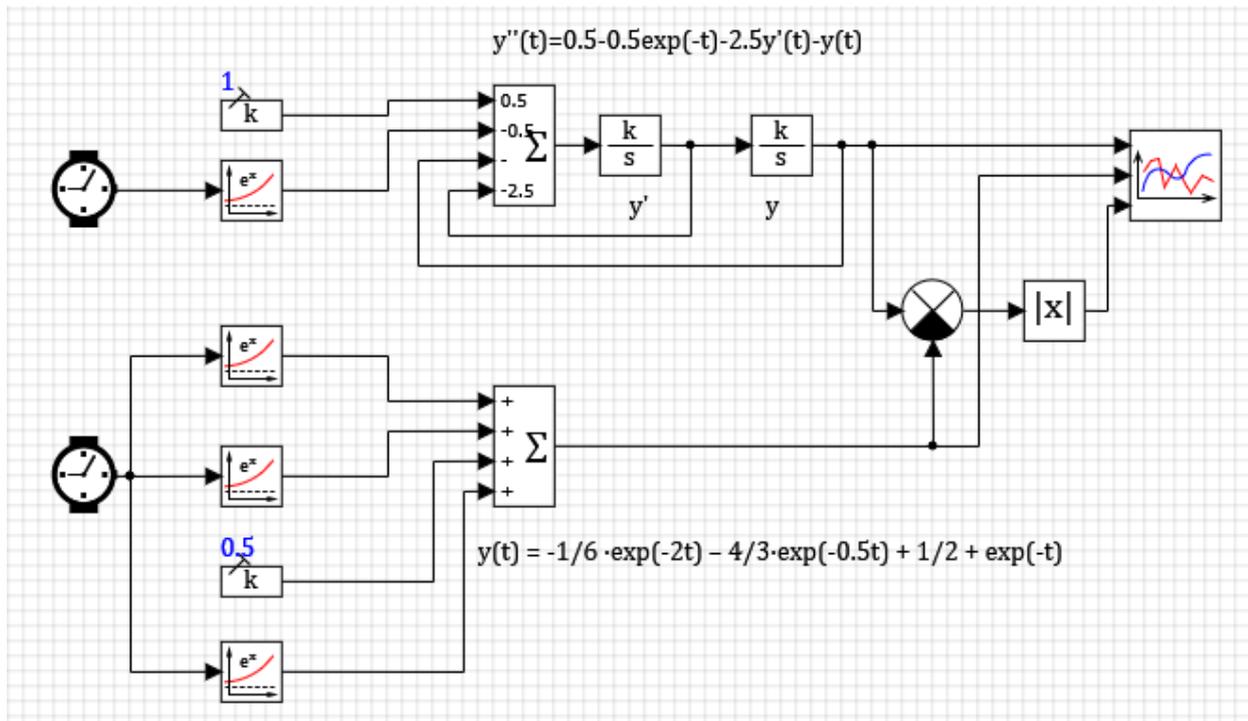
$$y(t) = -1/6 \cdot e^{-2t} - 4/3 \cdot e^{-0.5t} + 1/2 + e^{-t}. \quad (3.7)$$

Что бы проверить результат, выполним моделирование процесса в SimInTech, для этого преобразуем исходное уравнение (1.6) к виду:

$$y''(t) = 0.5 - 0.5e^{-t} - 2.5 \cdot y'(t) - y(t)$$

На рисунке представлена структурная схема для проверки результатов решения уравнения (3.6) при моделировании в рамках SimInTech и аналитического решения (3.7). Также представлены графики, отвечающие сравнению результатов моделирования в рамках SimInTech и аналитического решения (3.7).

Сравнение результатов показывает, что максимальное отклонение аналитического решения от решения, полученного в рамках SimInTech, на участке переходного процесса составляет  $5 \cdot 10^{-5}$ .



Таким образом, решение, полученное в рамках SimInTech, и решение, полученное аналитически, совпадают.