

Моделирование динамических систем

Анализ динамических процессов

Во многих случаях объект исследования записывается в виде задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые методы численного решения задачи Коши представлены в разделе: Задачи 6 (Решение задачи Коши) части Методы моделирования (Примеры решения задач). В разделе представлены алгоритмы, программы и результаты исследования. При численном решении дифференциальные уравнения заменяются разностными. Частично рассматриваются вопросы устойчивости, точности и сходимости. Решение полученных разностных уравнений может оказаться неустойчивым, хотя исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений была устойчивой.

В данном разделе для анализа динамических процессов будет использоваться среда SimInTech. Материалы по описанию среды SimInTech широко представлены в Интернете. Некоторые сведения присутствуют в разделе «Рекомендуемые источники».

Задача № 1 (радиоактивный распад)

Радиоактивный распад описывается уравнением

$$y' = -ky$$

Сколько вещества останется в момент времени $t = 100$, если $k = 0.01$, а в начальный момент времени $y(t=0) = 100$ г.

Сравнить результат с аналитическим решением $y = 100 \cdot \exp(-kt)$.

(Отметим, что решение задачи на языках программирования, представлено в разделе «Методы моделирования»).

Решение в SimInTech -

Представим решение задачи радиоактивного распада с использованием среды динамического моделирования технических систем SimInTech.

Скрипт проекта (проект в схеме модели общего вида) -

```
// Решение задачи радиоактивного распада  $y' = -ky$ 
```

```
initialization
```

```
var k      = 0.01,      // Постоянная радиоакт. распада грамм/с
```

```

t_fin    = 100.0,    //Конечное время моделирования, с
y0       = 100.0;    //Начальное значение массы (при t = 0 ), грамм
end;

```

Проект в схеме модели общего вида (Слой «Автоматика»)-



Блок PL на языке программирования (язык программирования библиотеки «Динамические») -

```

// Задача радиоактивного распада
init z=y0;
output y, err; // y - решение, err - отклонение от аналитического
решения
// Аналитическое решение
function yy_of(t: double):double
    yy_of = y0*exp(-k*t);
end;
z' = -k*z
if goodstep then begin y = z; err = yy_of(time) - y; end;

```

Вкладка «Параметры расчета»

Параметры проекта: E:\Document-20241016\SimInTech-Учеба(250214)\Work-240224\Task-250224-II.prt слой: Автома...

×

Параметры расчёта

Управление расчётом

Настройки проекта

Название	Имя	Формула	Значение
Основные параметры			
Минимальный шаг	hmin		0.0001
Максимальный шаг	hmax		0.0001
Шаг синхронизации задачи в пакете	synstep		0
Режим выполнения задачи в пакете	serial_mode		Параллельный
Начальный шаг интегрирования (если 0 - выбирается автоматически)	startstep		0
Метод интегрирования	intmet		Эйлера
Начальное время расчёта	starttime		0
Конечное время расчёта	endtime	t_fin	100
Относительная ошибка	relerr		0.0001
Абсолютная ошибка	abserr		1E-6
Относительная ошибка сравнения времени для дискретных блоков и источников	time_rel_error		1E-12
Начальное значение неинициализированных выходов блоков	InitOutputsValue		0
Генерация кода			
Управление расчётом			
Настройки решения НАУ			
Визуализация данных			
Удалённая отладка кода			
Сортировка блоков			
Тонкие настройки решения СЛАУ			
Тонкие настройки решения НАУ			
Электрические схемы			

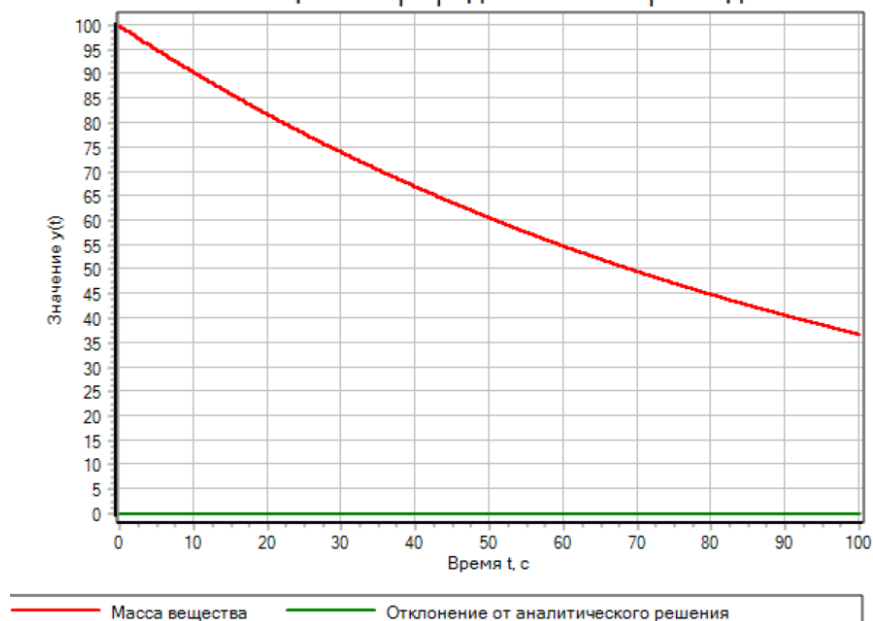
<

>

☐ Редактировать список параметров

Результаты моделирования —

Масса вещества при радиоактивном распаде



Задача № 2 Объект с изменяемой массой (модель реактивного двигателя)

Тело с начальной массой $m = 200$ кг ускоряется постоянной силой $F = 200$ ньютонов. Масса тела уменьшается на $dm = 1$ кг/сек. Сила сопротивления воздуха F_b пропорциональна скорости тела $F_b = K * V$ с коэффициентом пропорциональности $K = 2$ н*сек/м.

Найти скорость тела через 50 сек, если в момент времени $t = 0$ тело находилось в покое.

Замечание к Решению -

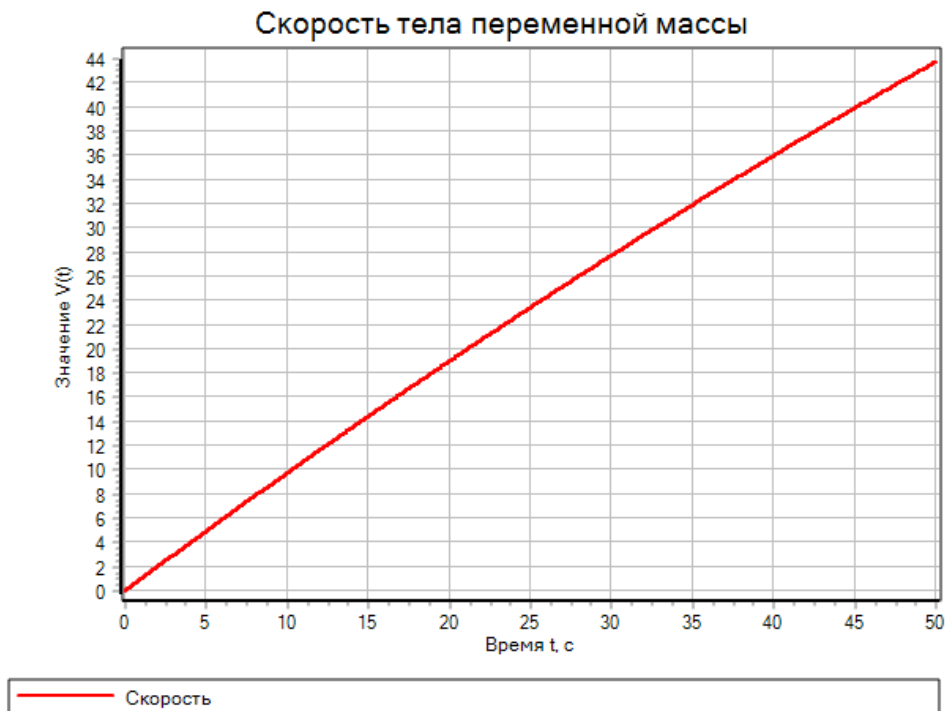
Дифференциальное уравнение записывается в виде –

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m - dm * t} * (F - K * V),$$

Граничное условие $V(t=0) = 0$.

Представить решение в SimInTech.

Для контроля: Результаты моделирования в SimInTech.



Задача № 3

Материальная точка массой m на подвесе длиной L – математический маятник.

Моделировать движение маятника если начальный угол отклонения от вертикальной оси $Q = 3.1415/4$ (Как известно, период математического маятника

$$T = 2 * \pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \text{ где } g - \text{ ускорение свободного падения}).$$

Замечания к Решению:

Если Q - угол отклонения нити (подвеса) от положения равновесия, то уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{g}{L} Q$$

Представим исходное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка -

$$\begin{aligned} \frac{d Q}{dt} &= Z, \\ \frac{d Z}{dt} &= -\frac{g}{L} Q \end{aligned}$$

и проинтегрируем их совместно.

Представить решение в рамках SimInTech.

Для контроля - Результаты моделирования в рамках SimInTech.



Задача № 4

Рассмотрим простую экосистему, состоящую из кроликов, для которых имеется неограниченный запас пищи, и лис, которые для пропитания охотятся за кроликами. Простейшая математическая модель системы (модель Вольтерра) представляется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 2r - \alpha * rf, & r(0) &= r_0, \\ \frac{df}{dt} &= -f + \alpha * rf, & f(0) &= f_0.\end{aligned}$$

где t – время; $r = r(t)$ – число кроликов; $f = f(t)$ – число лис; $\alpha = \text{const} > 0$.

При $\alpha > 0$ лисы встречают кроликов с вероятностью, пропорциональной произведению числа тех и других.

Исследуйте поведение этой системы для $\alpha = 0,01$ и различных значений r_0 и f_0 т. нескольких единиц до нескольких тысяч:

а) $r_0 = 300, f_0 = 150$,

б) $r_0 = 15, f_0 = 22$.

Представить результаты моделирования по модели Вольтерра в *SimInTech*.
Для контроля: - Результаты моделирования в *SimInTech*.



Задача № 5

Исследовать на устойчивость решение задачи Коши –

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = 50 * (e^{-t} - y) \quad y(t = 0) = 1$$

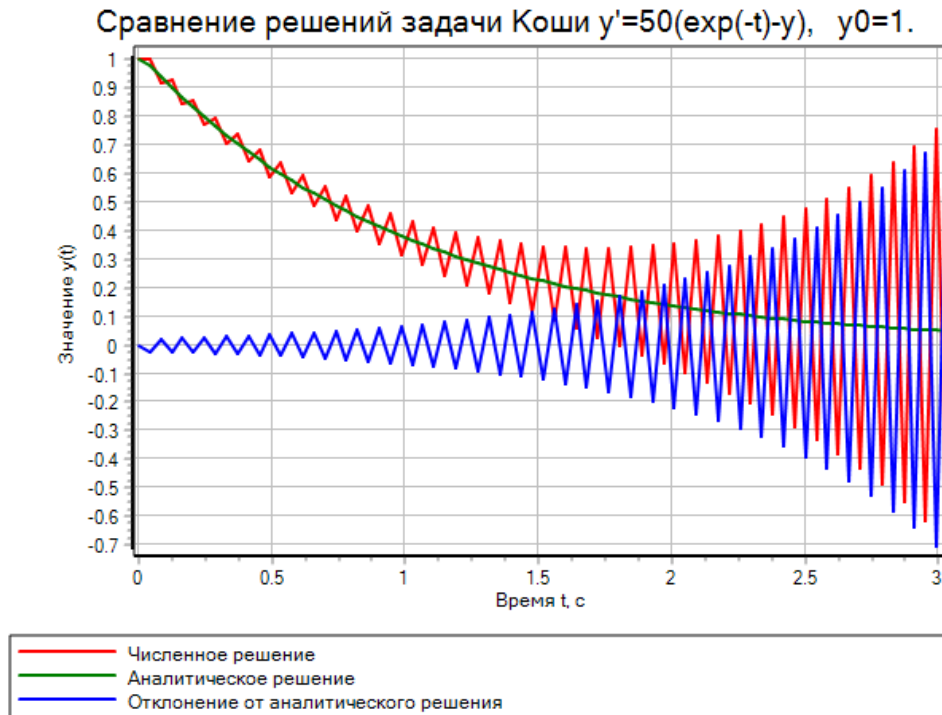
Неустойчивость проявляется как катастрофический рост ошибки численного решения при увеличении размера шага.

Аналитическое решение задачи –

$$y = \frac{50.0 * e^{-t} - e^{-50*t}}{49}.$$

Представить исследование на устойчивость задачи Коши в SimInTech при двух значениях шага разностной сетки $h = 0.039$ и $h = 0.041$.

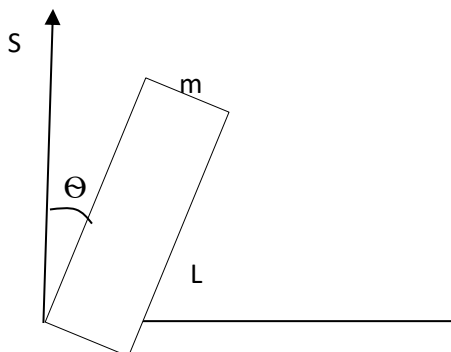
При шаге интегрирования $h = 0.041$ решение –



То есть численное решение теряет устойчивость при изменении шага сетки с 0.039 до 0.041. Обычно для конкретной задачи и конкретного метода существует некоторое граничное значение шага $h_{\max}$, превышение которого приводит к неустойчивости численного решения.

Задача № 6

Посредством электромотора вынуждаются быстрые колебания поддерживающего шарика перевернутого маятника в вертикальном направлении: $S = A \cos(\omega * t)$.



Подготовить программу для моделирования движения перевернутого маятника. С помощью программы исследовать движение маятника при следующих значениях параметров системы L , A , ω и начальных значениях $\Theta(0)$, $\dot{\Theta}(0)$:

Таблица 1.

L , (м)	A , (м)	ω , (рад/сек)	$\Theta(0)$, (рад)	$\dot{\Theta}(0)$, (рад/сек)
0,25	0	0	3,1	0
0,25	0,012	5,3	3,1	0
0,25	0,25	100	3,1	0
0,25	0,25	100	0,1	0
0,25	0,05	100	0,1	0
0,25	0,012	200	0,05	0

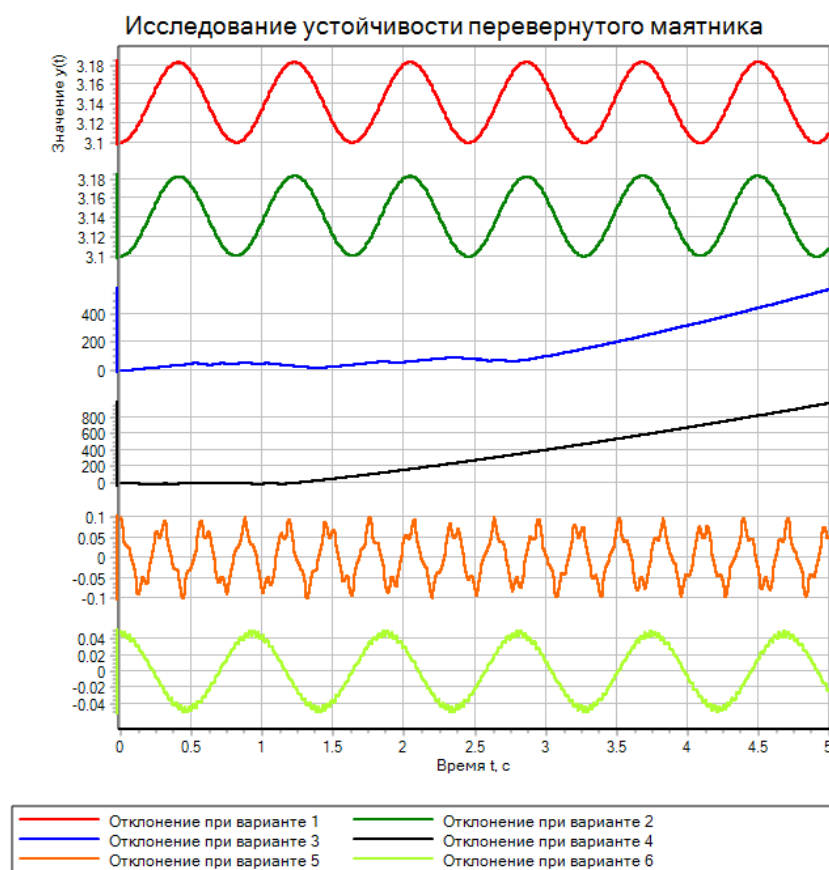
Замечание:

Применение второго закона Ньютона дает уравнение движения:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2 \cdot L} * (g - A * \omega^2 \cos(\omega t)) \sin \theta,$$

где g – ускорение силы тяжести. Для малых значений Θ ($\sin \Theta \approx \Theta$) уравнение превращается в уравнение Матье, которое устойчиво для некоторых значений A , ω и начальных условий. Движение перевернутого маятника будет устойчиво лишь в определенной области.

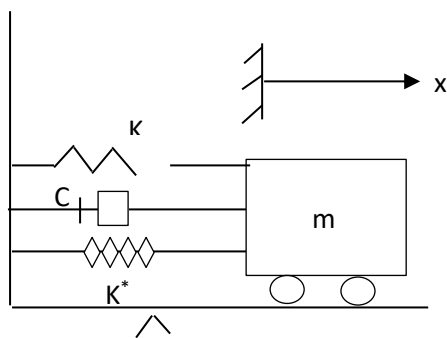
Получить решение в виде представленных графиков –



Сделать заключение: какие варианты начальных условий и параметров, представленных в таблице 1, приводят к устойчивым решениям. Проверку выполнить средствами SimInTech.

Задача №7

Устройство, показанное на рисунке, состоит из массы m , связанной с жесткой стенкой через пружину постоянной жесткости K , демпфер с коэффициентом демпфирования C и пружину с нелинейной характеристикой, создающей восстанавливающую силу, равную произведению постоянной K^* на смещение в третьей степени.



Подготовить программу для моделирования движения механической системы в интервале времени $0 \leq t \leq 1$ сек. Параметры системы имеют

следующие значения: $K = 2.0 \text{ Н/см}$, $K^* = 0.2 \text{ Н/см}^3$, $C = 0.15 \text{ Н*с/см}$, $m = 1.0 \text{ кг}$
 $= 0.01 \text{ Н*с}^2/\text{см}$. Начальные условия заданы в виде: $x(0) = 10 \text{ см}$, $x'(0) = 0$.

Замечание.

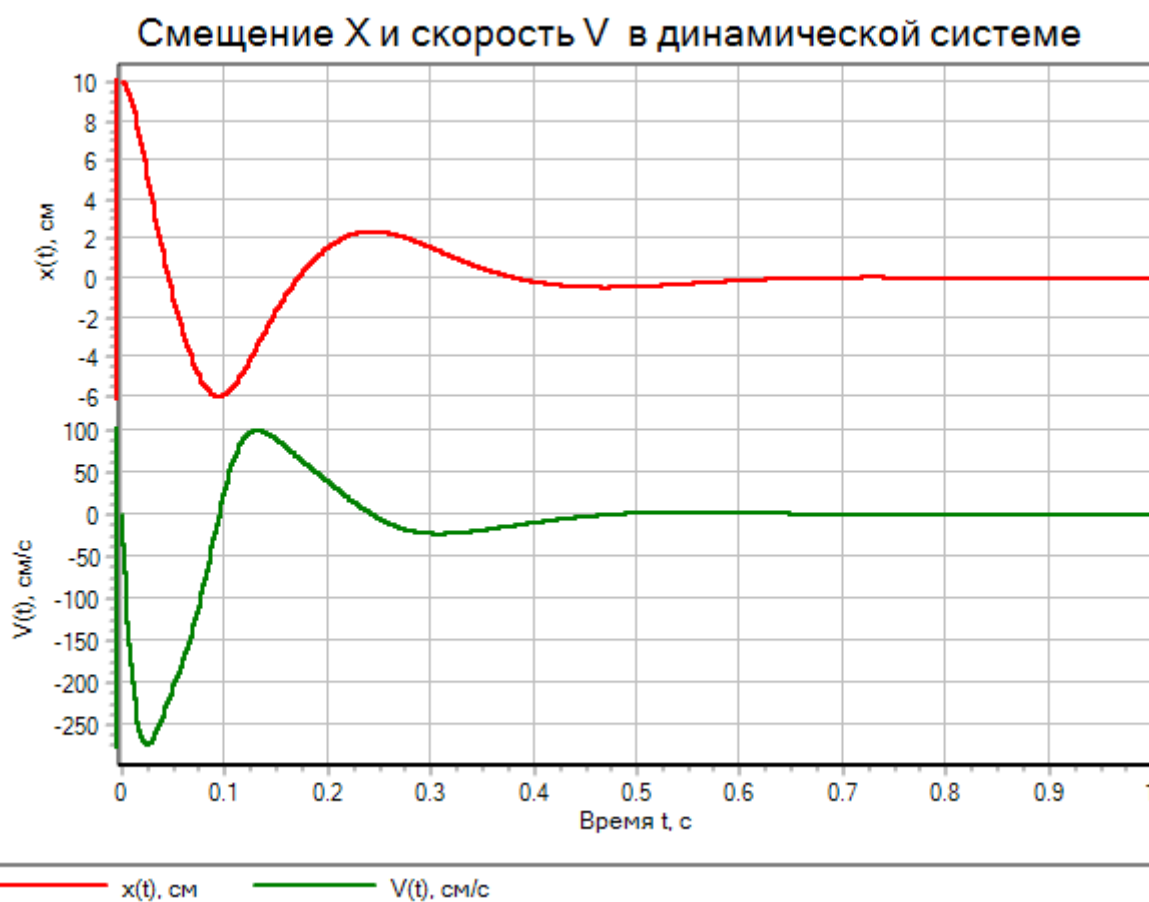
Движение системы описывается дифференциальным уравнением
 $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx + K^*x^3 = 0$.

Сведем дифференциальное уравнение второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка. В результате получим

$$\dot{x} = V \quad x(0) = 10$$

$$\dot{V} = -\frac{c}{m}V - \frac{K}{m}x - \frac{K^*x^3}{m} \quad V(0) = 0$$

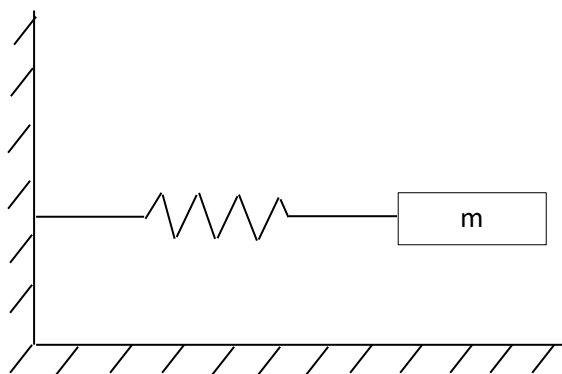
Подготовить программу моделирования и сравнить с результатами, представленными ниже –



Задача № 8

Тело движется по плоской поверхности с трением, обуславливающим демпфирование колебаний. Его масса $m = 45 \text{ кг}$, жесткость пружин $K = 175 \text{ н/м}$, коэффициент трения $f = 0,3$. Положим, что сила трения пропорциональна скорости тела. Рассчитать движение тела в интервале времени $0 \leq t \leq 20 \text{ сек}$ при начальных условиях: $x(0) = 7,5 \text{ см}$, $x'(0) = 0$.

Результаты представить графически.



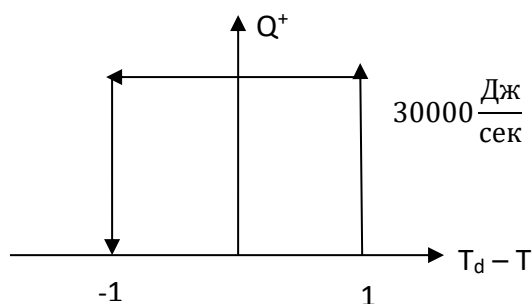
Задача №9

Система отопления некоторого объекта описывается уравнением

$$Q^+ - Q^- = 250 \, dT / dt,$$

где Q^+ - подвод тепла от нагревателя, Q^- - потери тепла в окружающую среду,

T – температура объекта.



Объект оборудован датчиком, который включает и выключает нагреватели в зависимости от разницы температуры объекта T и заданной температуры T_d так, чтобы разница составляла не более одного градуса. Включение нагревателя соответствует графику, представленному на рисунке.

Пусть $Q^- = 500 \, T$, заданная температура $T_d = 20^\circ\text{C}$, а начальная температура объекта $T_0 = 10^\circ\text{C}$.

Методами математического моделирования исследовать систему отопления объекта. В частности, средствами SimInTech получить динамику изменения температуры объекта -



Данный график показывает, что математически правильное решение с точки зрения управления технической системой (системой отопления объекта), является некорректным, так как приводит к «дребезгу» управляющего устройства (реле) и исполнительного механизма (нагревательного элемента). Обычно в технических системах отопления объекта используют регуляторы релейного типа. Явление «дребезга» возникает в системах автоматического управления при пренебрежении ТАУиР (теории автоматического управления и регулирования).

Вернемся к решению этой задачи позднее.